Feuilles d'exercices n°4 : Suites classiques

ECE3 Lycée Carnot

7 octobre 2011

Exercice 1 (*)

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 3% par an ; le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 2% par an. On note (u_n) et (v_n) les suites donnant la somme épargnée au bout de n années. Déterminer la nature de (u_n) et de (v_n), donner la valeur de u_n et v_n en fonction de n, puis déterminer au bout de combien d'années le placement B devient plus intéressant que le placement A (vous ne pouvez pas faire une résolution exacte, procédez à tâtons en calculant les valeurs des termes de chaque suite). Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$. On considère la suite auxiliaire (t_n) définie par $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, déterminer la valeur de t_n puis celle de u_n.

Exercice 3 (***)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 4 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 5 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de v_n puis de u_n.

Exercice 6 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n)$. En étudiant le comportement des deux suites auxiliaires définies par $w_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$, déterminer la valeur de u_n et de v_n.

Exercice 7 (**)

Un élève d'ECE passionné par la bourse décide d'arrêter ses études pour tenter de faire fortune en spéculant. Il dispose pour cela d'un pécule initial de 100 euros. Chaque jour, il perd 30 euros sur la matinée car il n'est pas encore bien réveillé, mais il réussit toujours à augmenter le capital qui lui reste de 20% sur le reste de la journée. L'apprenti trader finira-t-il par faire fortune ? Si oui, combien de jours lui faudra-t-il avant d'être millionnaire ? Question subsidiaire : quel est le capital minimal dont il fallait qu'il dispose pour ne pas se ruiner ?

Exercice 8 (***)

On considère une suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Vérifier que cette suite est bien définie, puis calculer le terme général u_n de la suite en vous ramenant à une suite d'un type bien connu.

Exercice 9 (*)

Déterminer pour chacune des suites suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
3. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
4. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$
5. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

Exercice 10 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 11 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. Déterminer la valeur de u_n (mais si, regardez mieux, c'est une suite d'un type qu'on maitrise, il y a juste une petite modification à faire).