

Feuille d'exercices n°8 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

13 décembre 2011

Exercice 1 (**)

- Une petite transformation est nécessaire pour ramener cette série à un calcul connu, en l'occurrence celui de la somme d'une série géométrique dérivée seconde :

$$\sum_{n=0}^N n^2 x^n = \sum_{n=0}^N n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^N nx^n = x^2 \sum_{n=0}^N n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=0}^N nx^{n-1}$$

La série est donc convergente si (et seulement si) $|x| < 1$, et sa somme vaut en appliquant les formules du cours

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- $\sum_{n=0}^N \frac{n-1}{3^n} = \sum_{n=0}^N \frac{n}{3^n} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^N n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{3^n}$. La série est donc convergente, de

$$\text{somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

- $\sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)x^n}{n!} = x^2 \sum_{n=2}^N \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}$, qui converge vers $x^2 e^x$ (note : on a commencé la somme de départ à $n = 2$ car les termes obtenus pour $n = 0$ et $n = 1$ seraient de toute façon nuls).

- $\sum_{n=0}^N \frac{n^2 8^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)8^n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{n8^n}{n!} = \sum_{n=2}^N \frac{8^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^N \frac{8^n}{(n-1)!} = 8^2 \sum_{n=2}^N \frac{8^{n-2}}{(n-2)!} + 8 \sum_{n=1}^N \frac{8^{n-1}}{(n-1)!} = 8^2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{8^n}{n!} + 8 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{8^n}{n!}$, qui converge vers $64e^8 + 8e^8 = 72e^8$.

- $\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 + 5n}{5^n} = 4 \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{5^n} + \sum_{n=0}^N \frac{n}{5^{n-1}}$ qui converge vers $4 \times \frac{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5} + 1)}{(1-\frac{1}{5})^3} + \frac{1}{(1-\frac{1}{5})^2}$ (en utilisant le résultat du premier calcul de l'exercice pour la première somme) = $\frac{24}{25} \times \frac{5^3}{4^3} + \frac{5^2}{4^2} = \frac{30}{16} + \frac{25}{16} = \frac{55}{16}$.

- En constatant que $\forall n \geq 2, \frac{2n^2}{n^3-1} \geq \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$, on voit que notre série est une série à termes positifs dont le terme général est minoré par celui d'une série divergente, donc elle diverge.

- On utilise encore une fois le résultat du premier calcul de l'exercice :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} = \frac{-\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3} + 1)}{(1 + \frac{1}{3})^3} = -\frac{2}{9} \times \frac{3^3}{4^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}.$$

- Ici, on a une série exponentielle, c'est du cours ! $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n!} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}.$

- $\sum_{n=0}^N \frac{n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^3} \sum_{n=0}^N \frac{n}{3^{2n-2}} = \frac{1}{27} \sum_{n=0}^N \frac{n}{9^{n-1}}$ On reconnaît une série géométrique dérivée, qui converge vers $\frac{1}{27} \frac{1}{(1 - \frac{1}{9})^2} = \frac{1}{27} \times \frac{81}{64} = \frac{3}{64}.$

- $\sum_{n=0}^N \frac{n+7}{2^n n!} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2^n n!} + \sum_{n=0}^N \frac{7}{2^n n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n n!} + \sum_{n=0}^N \frac{7}{2^n n!},$ qui converge vers $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + 7e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}}.$

- On reconnaît une somme télescopique dans la somme partielle : $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1.$ Comme cette expression ne converge pas quand n tend vers $+\infty,$ la série est divergente.

- Même principe avec un télescopage plus complexe : $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \sum_{k=1}^n 2 \ln(k+1) - \ln k - \ln(k+2)$
 $\ln(k+2) = 2 \sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=3}^{n+2} \ln k = 2 \ln 2 + 2 \ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 - \ln(n+1) - \ln(n+2) =$
 $\ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n+2}.$ Cette expression converge quand n tend vers $+\infty,$
 donc la série est convergente, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln 2.$

Exercice 2 (**)

Le plus simple pour déterminer la nature de la série est de chercher à calculer sa somme. Suivant les conseils de l'énoncé, on calcule $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+1} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} =$
 $\frac{a(n^2 + 3n + 2) + b(n^2 + 2n) + c(n^2 + n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}.$ par identification des coefficients, on doit avoir $a+b+c=0, 3a+2b+c=0$ et $2a=1,$ soit $a = \frac{1}{2}.$ Les deux autres équations donnent $b+c = -\frac{1}{2},$ soit $c = -b - \frac{1}{2},$ puis $2b+c = -\frac{3}{2},$ soit $b - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$ dont on déduit $b = -1,$ puis $c = \frac{1}{2}.$ On a donc finalement $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$

On peut faire un joli télescopage à partir de ceci : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} +$
 $\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$ La somme partielle ayant une limite, la série converge, et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$

Exercice 3 (**)

Le principe est le même que dans l'exercice précédent : $\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{a}{2n - 1} + \frac{b}{2n + 1}$, avec a et b vérifiant $a(2n + 1) + b(2n - 1) = 1$, soit $n(2a + 2b) + a - b = 1$. On obtient facilement $a = -b$, puis $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2(2n - 1)} - \frac{1}{2(2n + 1)}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n + 1)}$$
 (c'est une somme télescopique simple).

La somme partielle converge, donc la série est convergente, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0 , et si on le suppose vrai pour u_n , comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n} u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une certaine limite l . On en déduit que $e^{-u_n} u_n$ tend vers le^{-l} , mais aussi vers l puisque cette expression est égale à u_{n+1} . On en déduit que $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n} u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite v_n diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 5 (**)

On a $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$. Chacun des n termes de cette dernière somme étant plus grand que $\frac{1}{2n}$, la somme est plus grande que $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Or, si la série harmonique convergait vers une certaine somme S , on devrait avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Ce n'est manifestement pas le cas, donc la série harmonique ne converge pas (un petit raisonnement par l'absurde).

Exercice 6 (***)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorer, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leq u_n \leq 1$, on a alors également $0 \leq 1 - u_n \leq 1$, donc $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq 1$. Or, $u_n(1 - u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.
La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on en déduit en prenant la limite de chaque côté que $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si

$l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

- En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0 .
- La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n) , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérée diverge.
- En reprenant la relation de récurrence définissant la suite, on constate que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) \sim -u_n$ puisque u_n est une suite qui converge vers 0. Deux séries de terme général équivalent ayant même nature (oui, je sais, dans le cours on a mis des séries à termes positifs, et celles-là sont à terme négatif, mais il suffit d'appliquer le théorème à leurs opposés pour que ça marche ; ce qui est important c'est que les séries soient de signe constant), $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7 (*)

- $\frac{1}{k^2 - k} \sim \frac{1}{k^2}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \frac{1}{k^2 - k}$ converge.
- $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq \frac{1}{e^k}$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{e^k + e^{-k}}$ converge.
- $\frac{1}{k^3 + 2^k} \sim \frac{1}{k^3}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{k^3 + 2^k}$ converge.
- $\ln \frac{1}{2n^4}$ tend vers $\ln \frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série diverge.
- $\sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} \sim \sqrt{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc la série diverge.
- $\frac{\ln n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{\ln n}{2^n}$. La deuxième fraction tendant rapidement vers 0 (par croissance comparée), on aura certainement (à partir d'un certain rang) $\frac{\ln n}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série converge.

Exercice 8 (**)

La série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{4k^2}$. De même pour la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2}$. On peut donc écrire que la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Or, la somme de gauche n'est autre que la somme des inverses des carrés de tous les entiers (on a

juste séparé entiers pairs et impairs) qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Quant à la deuxième somme à droite, elle vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Problème

1 Un exemple

1. C'est une récurrence double facile : u_1 et u_2 sont des entiers, et en supposant que u_n et u_{n+1} sont tous les deux entiers, la relation de récurrence implique que $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve l'hérédité.
2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique $x^2 - 5x + 6 = 0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $r = \frac{5+1}{2} = 3$ et $s = \frac{5-1}{2} = 2$. On en déduit que $u_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$, où α et β , au vu des valeurs initiales, vérifient $3\alpha + 2\beta = 2$ et $9\alpha + 4\beta = 3$. En soustrayant le double de la première équation à la deuxième, on obtient $3\alpha = -1$, soit $\alpha = -\frac{1}{3}$, puis $\beta = \frac{2 - 3\alpha}{2} = \frac{3}{2}$. Conclusion : $\forall n \geq 1, u_n = 3 \times 2^{n-1} - 3^{n-1}$.

3. Les sommes partielles de la série sont données par $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{3^k}{k!}$. Chacune de ces deux séries est convergente (séries exponentielles, au manque du premier terme près), donc la série étudiée également et sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} = \frac{3}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{3}(e^3 - 1) = \frac{3}{2}e^2 - \frac{e^3}{3} - \frac{7}{6}$.

4. Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes (discriminant strictement positif), la suite peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$, et les sommes partielles de la série étudiée seront sommes de deux séries exponentielles convergentes. S'il y a une racine double, on peut mettre u_n sous la forme $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$, et cette fois les sommes partielles s'écriront $\alpha \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r^k}{k!} +$

$\beta s \sum_{k=1}^{k=n} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}$, qui est encore une fois une somme de deux séries exponentielles convergentes.

2 Série exponentielle

1. Cela se fait très bien par récurrence. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on suppose que, pour un certain entier supérieur ou égal à 4, $2^n \leq n!$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leq 2 \times n! \leq (n+1) \times n! = (n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Pour tout les indices de la somme, au vu de la question précédente, on aura $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$, donc $\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{2^k}$, somme géométrique égale à $\frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{k=n-4} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^4} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-3}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right) \leq \frac{1}{8}$.
3. La série exponentielle est une série à termes positifs, majorée au vu de ce qui précède par $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{8}$. Elle converge donc, et sa limite l vérifie certainement $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \leq l \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$, soit $\frac{8}{3} \leq l \leq \frac{64}{27}$.
4. PROGRAM expo ;
USES winCRT ;

```

VAR s : real ; i,f,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez un entier n') ;
ReadLn(n) ;
s := 1 ; f := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
f := f*i ;
s := s+1/f ;
END ;
WriteLn('La valeur de la somme partielle est ',s) ;
END.

```

3 Suites et séries de Cantor

- On peut écrire (si $p < n$, sinon la somme est bien sûr nulle)
$$\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}.$$
- On a en effet $S_n - S_p = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{u_k}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Or, par hypothèse, on a toujours $\frac{u_k}{k!} \leq \frac{k-1}{k!}$, donc notre expression est bien majorée par la somme calculée précédemment. Par ailleurs, $S_n - S_p \geq 0$ puisqu'à partir du rang 2, $\frac{u_k}{k!} \geq 0$.
- En particulier, on aura $\forall n \geq 2, S_n - S_1 \leq 1 - \frac{1}{n!} \leq 1$, soit $S_n \leq S_1 + 1$. La suite S_n étant croissante, elle converge.
- Il suffit de reprendre l'encadrement de la question 2 : $0 \leq S_n - S_p \leq \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$, et de passer à la limite pour obtenir $0 \leq S - S_p \leq \frac{1}{p!}$, ce qui est équivalent à ce qui nous est demandé.

4 Développement de Cantor d'un réel

- C'est évident au vu de la définition de u_n , puisque les termes de la suite (p_n) sont des entiers.
- Les inégalités $p_n \leq n!x < p_n + 1$ ne sont que la définition de la partie entière. De même, on aura $p_{n-1} \leq (n-1)!x < p_{n-1} + 1$, donc $np_{n-1} \leq n!x < n(p_{n-1} + 1)$. Le nombre np_{n-1} étant un entier inférieur à $n!x$, il est nécessairement plus petit que p_n (par définition de la partie entière). De même, $n(p_{n-1} + 1)$ est un entier strictement supérieur à $n!x$, donc supérieur ou égal à $p_n + 1$.
- Le nombre u_1 est certainement entier. De plus, au vu des inégalités précédentes, on aura toujours $0 \leq p_n - np_{n-1}$, et $p_n + 1 \leq np_{n-1} + n$, soit $p_n - np_{n-1} \leq n - 1$. Autrement dit, $0 \leq u_n \leq n - 1$, ce qui définit bien une suite de Cantor.
- On se convainc assez facilement que $S_n = \frac{p_n}{n!}$, ce qui se prouve par récurrence : $S_1 = \frac{u_1}{1!} = p_1$. Ensuite, si on suppose $S_n = \frac{p_n}{n!}$, on aura $S_{n+1} = S_n + \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{p_{n+1} - (n+1)p_n}{(n+1)!} =$

$\frac{p_n}{n!} + \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{p_n}{n!} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve l'hérédité. On peut aussi faire un calcul direct de somme télescopique.

5. En divisant par $n!$ les inégalités de la question 2, on a notamment $\frac{p_n}{n!} \leq x < \frac{p_n}{n!} + \frac{1}{n!}$. Une simple application du théorème des gendarmes nous donne donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{n!} = x$, et la série (S_n) converge vers x .