Feuille d'exercices n°8 : séries

ECE3 Lycée Carnot

9 décembre 2011

Exercice 1 (**)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de x pour les séries faisant intervenir un x) :

- $\sum n^2x^n$
- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$
- $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$
- $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, puis calculer sa somme après avoir mis u_n sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

Exercice 3 (**)

Calculer par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 4 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 5 (**)

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique.

Exercice 6 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 (*)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\sum \dfrac{1}{k^2 - k}$
- $\sum \dfrac{1}{e^k + e^{-k}}$
- $\sum \dfrac{1}{k^3 + 2^k}$
- $\sum \ln \dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}$
- $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
- $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$

Exercice 8 (**)

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Problème (premier problème du concours blanc 2011)

Dans tout ce problème, on étudie différentes séries ayant une forme proche de celle de la série exponentielle.

1 Un exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer une formule explicite pour u_n.
3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ est convergente, et calculer sa somme.
4. Expliquer pourquoi, quelle que soit la suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a un discriminant positif ou nul, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ sera convergente.

2 Série exponentielle

Le but de cette partie est de prouver la convergence de la série exponentielle et de donner quelques propriétés de sa limite, **sans** utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 4$, $n! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 4$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.
4. Écrire un programme PASCAL calculant la somme partielle d'indice n de la série exponentielle, pour un entier n choisi par l'utilisateur.

3 Suites et séries de Cantor

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'**entiers** relatifs est appelée suite de Cantor si $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant n-1$. La série de Cantor associée à une telle suite (u_n) est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$. On considère dans cette partie une suite de Cantor (u_n) et on note S_n la somme partielle de la série de Cantor associée : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$.

1. Calculer en fonction de n et p la somme $A = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!}$ (on pourra utiliser un télescopage).
2. Montrer que, $\forall 1 \leqslant p < n$, $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant A$.
3. En déduire que la série de Cantor associée à (u_n) est convergente. On notera S sa limite.
4. Montrer que, $\forall p \geqslant 1$, $S_p \leqslant S \leqslant S_p + \frac{1}{p!}$.

4 Développement de Cantor d'un réel

On considère désormais un réel quelconque x et on note, pour $n \geqslant 1$, $p_n = Ent(n!x)$ (où $Ent(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). On définit ensuite (u_n) par $u_1 = p_1$ et, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = p_n - np_{n-1}$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $np_{n-1} \leqslant p_n \leqslant n!x < p_n + 1 \leqslant n(p_{n-1}+1)$.
3. En déduire que (u_n) est une suite de Cantor.
4. On note comme précédemment S_n la somme partielle de la série de Cantor associée à (u_n) : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Exprimer S_n en fonction de p_n.
5. Prouver que la série converge vers x.