Feuilles d'exercices n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

1 octobre 2011

Exercice 1 (*)

1. $S_1 = \sum_{i=3}^{i=12} 2^i$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 2 (** à ***)

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\ 065 = 3\ 195$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
   $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 3 (**)

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2+ak+bk^2-b+ck^2+ck}{k(k^2-1)}$. En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$; $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1}+\frac{5}{k}+\frac{-3}{k+1} = -2\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k+1} = -2\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{k=n+1}\frac{1}{k} = -2\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-2-1+5\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-3\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}$.

Exercice 4 (**)

1. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (n+1)^3-1$.
2. Comme $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$, on a $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$, soit en utilisant le résultat de la première question $3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = (n+1)^3-1$, ou encore $3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3-1 = n^3+3n^2+3n$.
   Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. On retrouve donc la formule $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 (***)

- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3+j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{2}$.
- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{j(j+1)}{2}-(n-j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$
  $= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 6 (**)

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k}=\frac{\prod_{k=2}^{k=n}k-1}{\prod_{k=2}^{k=n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{k=n-1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k}=\frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1)\prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n}k\right)^2}=\frac{\prod_{k=1}^{k=n-1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{k=n+1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k}=$ $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)=\prod_{k=1}^{k=n}3(2k-1)=3^n\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1)=3^n\frac{\prod_{k=1}^{k=2n}k}{\prod_{k=1}^{k=n}2k}=3^n\frac{(2n)!}{2^n\times n!}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 7 (***)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n\leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, in itialisons pour $n=4$: on a alors $2^4=16$ et $4!=24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n\leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1}\leqslant 2n!\leqslant(n+1)n!=(n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $(1+x)^n\geqslant 1+nx$. Pour $n=0$, la propriété P_0 stipule que $(1+x)^0\geqslant 1$, ce qui est vrai puisque $(1+x)^0=1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n\geqslant(1+x)(1+nx)$ par hypothèse de récurrence. Or, $(1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2\geqslant 1+(n+1)x$ puisque nx^2 est toujours un nombre positif. On en déduit que $(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x$, ce qui est la proptiété P_{n+1}. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier n.
3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k\times k!=(n+1)!-1$. Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=1}k\times k!=1\times 1!=1$ et $2!-1=2-1=1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1}k\times k!=\sum_{k=1}^{k=n}k\times k!+(n+1)(n+1)!=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!=(n+1)!(1+n+1)-1=$ $(n+2)!-1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n=4$), qui a deux diagonales. Comme $\dfrac{4\times 1}{2}=2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la proriété vraie au rang n, et essayons de la prouver au rang $n+1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale. Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n-1+\dfrac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $=\dfrac{2n-2+n^2-3n}{2}=$ $\dfrac{n^2-n-2}{2}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.

Exercice 8 (**)

On calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 2^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 9 (**)

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \dfrac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \dfrac{1}{3}(2n + \dfrac{1}{3^n} + 4n + 6) = \dfrac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \dfrac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 10 (***)

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété $P_n : u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 11 (***)

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$.
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k \leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k \leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \displaystyle\sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 = (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la

formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.