

Feuilles d'exercices n°3 : Sommes, produits, récurrences

ECE3 Lycée Carnot

27 septembre 2011

Exercice 1 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

Exercice 2 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1. $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1)$ | 4. $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k$ | 7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$ |
| 2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3$ | 5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2 - 1)$ | 8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$ |
| 3. $\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1)$ | 6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$ | 9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$ |

Exercice 3 (**)

Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 4 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 5 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}; \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| \text{ et } \sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j$$

Exercice 6 (**)

Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad 2. \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad 3. \prod_{k=1}^{k=n} (6k - 3)$$

Exercice 7 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

- $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$
- $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
- $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
- Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 8 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 10 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

- Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
- Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
- On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
- Calculer T_n et U_n .
- Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
- Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.