Feuille d'exercices n°22 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

19 juin 2012

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3+5X-1)^2 = 4X^6+25X^2+1+20X^4-4X^3-10X = 4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2+3X)^3 + 5(-X^2+3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3+5X-1)^2 + 3(2X^3+5X-1) = -(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3+5X-1)^3(-X^2+3X) + (4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)^2 - 3(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)$
  $= (8X^9+125X^3-1+60X^7+150X^5-12X^6+6X^3-75X^2+15X-60X^4)(-3X^2+9X) + (16X^{12}+400X^8+16X^6+625X^4+100X^2+1+160X^{10}-32X^9+200X^8-80X^7+8X^6-160X^7+1\,000X^6-400X^5+40X^4-200X^5+80X^4-8X^3-500X^3+50X^2-20X) - 12X^6 - 60X^4 + 12X^3 - 75X^2 + 30X - 3$
  $= (8X^9+60X^7-12X^6+150X^5-60X^4+131X^3-75X^2+15X-1)(-3X^2+9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= (-24X^{11}+72X^{10}-180X^9+540X^8+36X^8-108X^7-450X^7+1\,350X^6+180X^6-540X^5-393X^5+1\,179X^4+225X^4-675X^3-45X^3+135X^2+3X^2-9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= 16X^{12} - 24X^{11} + 232X^{10} - 212X^9 + 1\,176X^8 - 798X^7 + 2\,542X^6 - 1\,533X^5 + 2\,089X^4 - 1\,216X^3 + 213X^2 + X - 2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (**)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8-2\times4-5\times(-2)+6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2+bX+c) = aX^3+(2a+b)X^2+(2b+c)X+2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a+b = -2$; $2b+c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2-4X+3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2;1[\cup]3;+\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2};e[\cup]e^3;+\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1;3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$, soit $\mathcal{S} = [0;\ln 3]$.

Exercice 3 (**)

Le polynôme P a pour racine évidente -1 : $P(-1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$, donc P est factorisable par $X+1$: $P(X) = (X+1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$. Par identification, on obtient $a = -1$; $a+b = -3$; $b+c = 6$ et $c = 8$, soit $a = -1$; $b = -2$ et $c = 8$. On a donc $P(X) = (X+1)(-X^2-2X+8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, donc admet deux racines $x_1 = \dfrac{2-6}{-2} = 2$, et $x_2 = \dfrac{2+6}{-2} = -4$. On en déduit que $P(X) = -(X+1)(X-2)(X+4)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-4		-1		2	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Le polynôme Q a pour racines évidente 2 : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$, donc $Q(2) = (X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$. Par identification, $a = 1$; $b - 2a = -6$; $c - 2b = 13$ et $-2c = -10$, soit $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$. On a donc $Q(X) = (X-2)(X^2-4X+5)$. le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc ledit facteur est toujours positif, et on a le tableau de signes suivant :

x		2	
$P(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 4 (* à **)

1.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3X^3 & - & 5X^2 & + & X & + & 2 & X-2 \\ \cline{9-9}
- & (3X^3 & - & 6X^2) & & & & & 3X^2+X+3 \\
 & & & X^2 & + & X & + & 2 & \\
 & & - & (X^2 & - & 2X) & & & \\
 & & & & & 3X & + & 2 & \\
 & & & & - & (3X & - & 6) & \\
 & & & & & & & 8 &
\end{array}$$

Conclusion : $3X^3 - 5X^2 + X + 2 = (X-2)(3X^2+X+3) + 8$.

2.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
- & 5X^4 & + & 4X^3 & + & 6X^2 & & & + & 1 & X^2-5X+3 \\ \cline{11-11}
- & (-5X^4 & + & 25X^3 & - & 15X^2) & & & & & -5X^2-21X-84 \\
 & & - & 21X^3 & + & 21X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (-21X^3 & + & 105X^2 & - & 63X) & & & \\
 & & & & - & 84X^2 & + & 63X & + & 1 & \\
 & & & & - & (-84X^2 & + & 420X & - & 252) & \\
 & & & & & & - & 357X & + & 253 &
\end{array}$$

Conclusion : $-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2-5X+3)(-5X^2-21X-84) - 357X + 253$ (eh oui, parfois, les résultats sont ignobles).

3.

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & X^5 & - & 7X^4 & & & - & X^2 & - & X & + & 9 & X^2-5X+4 \\ \cline{13-13}
- & (X^5 & - & 5X^4 & + & 4X^3) & + & X^2) & & & & & X^3-2X^2-14X-63 \\
 & & - & 2X^4 & - & 4X^3 & - & X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & - & (-2X^4 & + & 10X^3 & - & 8X^2) & & & & & \\
 & & & & - & 14X^3 & + & 7X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & & & - & (-14X^3 & + & 70X^2 & - & 56X) & & & \\
 & & & & & & - & 63X^2 & + & 55X & + & 9 & \\
 & & & & & & - & (-63X^2 & + & 315X & - & 252) & \\
 & & & & & & & & - & 260X & + & 261 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 260X + 261$

Exercice 5 (* à ***)

1. En posant $Y = X^2$, on cherche d'abord à factoriser $2Y^2 - 3Y - 2$, trinôme de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, admettant pour racines $Y_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$. On en déduit que $2Y^2 - 3Y - 2 = 2\left(Y + \dfrac{1}{2}\right)(Y - 2) = (2Y + 1)(Y - 2)$, et ensuite que $P(X) = (2X^2 + 1)(X^2 - 2) = (2X^2 + 1(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ (le premier facteur ne peut pas se factoriser plus puisqu'il n'a pas de racine).
2. On pourrait avoir envie de poser $Y = X^4$ et procéder comme précédemment, mais un gros souci apparait rapidement : le trinôme obtenu n'a pas de racine. En fait, c'est pire que ça : on sait dès le départ que le polynôme de degré 8 initial n'a pas de racine puisqu'il est toujours strictement positif. Il est néanmoins factorisable (ce n'est pas contradictoire, il ne faut simplement pas s'attendre à obtenir des facteurs de degré 1) en étant un peu (beaucoup ?) astucieux : $P(X) = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique (encore une fois, pas de méthode plus simple) : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$; et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ (comme prévu, aucun de ces quatre trinômes n'admet de racine, on ne peut donc pas factoriser plus).
3. Commençons par poser $Y = X^3$ et cherchons à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a une racine évidente qui est -1, on peut donc écrire $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(aY^2 + bY + c) = aY^3 + (a + b)Y^2 + (b + c)Y + c$. Par identification on a $a = 1$; $a + b = 1$; $b + c = 1$ et $c = 1$, donc $a = c = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(Y^2 + 1)$. Le deuxième facteur ne risque pas de se factoriser plus, on a donc $P(X) = (X^3 + 1)(X^6 + 1)$. Le premier facteur, $Y^3 + 1$, a pour racine évidente -1 (encore une fois), donc se factorise par $X + 1$. Une autre façon de voir les chose est d'utiliser l'identité remarquable vue en cours : $X^3 + 1 = X^3 - (-1)^3 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. Le trinôme $X^2 - X + 1$ a un discriminant négatif, on ne peut pas le factoriser. Reste à s'occuper du facteur $X^6 + 1$, pour lequel on ne risque pas de trouver de racines puisqu'il est toujours positif. On peut utiliser la même astuce que ci-dessus : $X^6 + 1 = (X^2)^3 - (-1)^3 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Le facteur $X^2 + 1$ n'admet toujours pas de racine et n'est pas factorisable, et si vous avez suivi les calculs de la question 2 de ce même exercice, vous savez déjà que $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Conclusion de tous ces calculs : $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Exercice 6 (**)

Un polynôme de degré 3 est de la forme $P = aX^3+bX^2+cX+d$, on a donc dans ce cas $P(X+1)-P(X) = a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-(aX^3+bX^2+cX+d) = 3aX^2+3aX+a+2bX+b+c$. Par identification, on aura $P(X+1)-P(X) = X^2$ si $3a = 1$; $3a+2b = 0$ et $a+b+c = 0$, soit $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}$ et $c = -a-b = \frac{1}{6}$ (et d peut être pris comme on le souhaite, on posera par exemple $d = 0$). Un polynôme satisfaisant est donc $P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$. En exploitant l'égalité $P(k+1)-P(k) = k^2$ (valable pour tout entier k), on peut en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} P(k+1) - P(k) = P(n+1)-P(0)$ (c'est une somme télescopique. Comme $P(0) = 0$ et $P(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) = \frac{(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on retrouve une formule bien connue depuis quelques mois désormais.

Pour la deuxième partie de l'exercice, le principe est le même, mais en partant d'un polynôme de degré 5 (d'où les calculs un peu plus compliqués). Posons donc $P = aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$, alors (en révisant au passage notre triangle de Pascal) on a $P(X+1)-P(X) = a(X+1)^5 + b(X+1)^4 + c(X+1)^3 + d(X+1)^2 + e(X+1) + f - (aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f) = 5aX^4 + 10aX^3 + 10aX^2 + 5aX + a + 4bX^3 + 6bX^2 + 4bX + b + 3cX^2 + 3cX + 1 + 2dX + d + e = 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e$. Par identification, tout ceci sera égal à X^4 si $5a = 1$; $10a+4b = 0$; $10a+6b+3c = 0$; $5a+4b+3c+2d = 0$ et $a+b+c+d+e = 0$ (et on peut prendre par exemple f égal à 0), soit $a = \frac{1}{5}$; $b = -\frac{5}{2}a = -\frac{1}{2}$; $c = -\frac{2}{3}b = \frac{1}{3}$ (puisque $10a+4b = 0$, on a $2b+3c = 0$) ; $d = -\frac{1}{2}(5a+4b+3c) = -\frac{1}{2}(1-2+1) = 0$, et enfin $e = -a-b-c-d = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-6+15-10}{30} = -\frac{1}{30}$. On obtient donc $P(X) = \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X$, puis de manière similaire à ce qu'on a fait dans la première partie de l'exercice $\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = P(n+1) = \frac{(n+1)^5}{5} - \frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{30} = \frac{(n+1)(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)}{30} =$

$$\frac{(n+1)(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1)}{30}$$

$= \frac{(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n))}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Le dernier gros facteur ne se factorise pas de façon immédiate, mais les plus curieux d'entre vous pourront constater que $-\frac{1}{2}$ en est une racine : $6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = -6 \times \frac{1}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = 0$. On en déduit que $6n^3+9n^2+n-1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)(an^2+bn+c) = an^3 + \left(b+\frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(c+\frac{1}{2}b\right)n + \frac{1}{2}c$. Par identification, on obtient $a = 6$; $b + \frac{1}{2}a = 9$; $c + \frac{1}{2}b = 1$ et $\frac{1}{2}c = -1$; soit $a = 6$; $b = 6$ et $c = -2$. On a donc $6n^3+9n^2+n-1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)(6n^2+6n-2) = (2n+1)(3n^2+3n-1)$ (remarquez que le facteur $2n+1$ déjà présent pour la formule de la somme des carrés refait ici son apparition). Reste encore à factoriser le dernier terme si on le souhaite. Il a pour discriminant $\Delta = 9+12 = 21$, et admet donc deux racines $n_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{3}$ et $n_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{3}$. ces deux racines étant assez peu sympathiques, on préfèrera garder la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$