

Feuilles d'exercices n° 22 : Polynômes

ECE3 Lycée Carnot

13 juin 2012

Exercice 1 (*)

Soit P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (**)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P .
2. Factoriser P sous la forme $(X + 2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur \mathbb{R} .
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leq 5 - 6e^{-x}$

Exercice 3 (**)

Factoriser les polynômes suivants et dresser leur tableau de signe sur \mathbb{R} : $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$; $Q(X) = X^3 - 6X^2 + 13X - 10$.

Exercice 4 (* à **)

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de P par Q .

- $P(X) = 3X^3 - 5X^2 + X + 2$ et $Q(X) = X - 2$
- $P(X) = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 3$.
- $P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 4$.

Exercice 5 (* à ***)

Factoriser le plus possible chacun des polynômes suivants :

1. $P(X) = 2X^4 - 3X^2 - 2$
2. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
3. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 6 (**)

Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant $P(X+1) - P(X) = X^2$. En déduire une nouvelle façon de prouver la formule bien connue pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^2$. En utilisant une méthode similaire, déterminer

une jolie formule pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^4$ (attention, il y a du calcul en perspective).