Feuilles d'exercices n° 13

ECE3 Lycée Carnot

14 février 2012

Exercice 1 (*)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits de deux matrices possibles à l'aide de ces matrices.

Exercice 2 (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour toute valeur de $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4 (**)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 5 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire A sous la forme $I_4 + B$, où B est une matrice nilpotente, et en déduire l'expression de A^p.Écrire explicitement la matrice A^{10}.

Exercice 6 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$. Montrer que $(A + I)^3 = 0$. En déduire l'expression de A^p.

Exercice 7 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une suite de réels (a_p) telle que $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_p & 1-2a_p & 2a_p \\ a_p & -a_p & a_p+1 \end{pmatrix}$

Calculez a_p et en déduire A^p.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geq 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 9 (***)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire les puissances de A.
2. On pose $B = 2I + A$. Déterminer les puissances de la matrice B.
3. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) les suites définies pour $n \geq 1$ par $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2a_n \\ b_n & = & 2a_n + 2b_n \\ c_n & = & b_n + 2c_n \end{array} \right.$.
   Déterminer les valeurs prises par ces suites en fonction de n, a_1, b_1 et c_1 (utilisez les questions précédentes).

Exercice 10 (***)

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $Tr(A)$ est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
2. Montrer que, si A et B sont des matrices carrées de même taille, $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B vérifiant $AB - BA = I$.

Exercice 11 (***)

Soit a un nombre réel et $M_a = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel non nul a_0 pour lequel $M_{a_0}^2 = M_{a_0}$.
2. On pose $P = M_{a_0}$ et $Q = I - P$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $M_a = P + \alpha Q$.
3. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
4. Calculer M_a^k.