Feuille d'exercices n°17 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

8 avril 2012

Exercice 1 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(10; 0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \dfrac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 2 (*)

1. Il s'agit de l'exemple standard de loi hypergéométrique. Ici le paramètre de R est $\left(15; 6; \dfrac{2}{3}\right)$ (nombre total de boules ; nombre de tirages ; proportion de boules rouges). On a donc (si $1 \leqslant k \leqslant 6$, sinon la probabilité est nulle) $P(R = k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{5}{15}}$; $E(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15-6}{15-1} = \dfrac{6}{7}$. Pour V, on utilise par exemple que $V = 6 - R$, donc $P(V = k) = P(R = 6 - k)$; $E(V) = 6 - 4 = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.
2. Cette fois-ci, on a une loi binomiale de paramètre $\left(6; \dfrac{2}{3}\right)$. On a donc $P(R = k) = \begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{3^{n-k}} = \begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix} \dfrac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 3 (***)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1 - p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1 - (1 - p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\dfrac{N}{n}; 1 - (1 - p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\dfrac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\dfrac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1 - (1 - p))^n \times \dfrac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \dfrac{N}{n} + (1 - (1 - p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $100 + 1\ 000(1 - 0.99^{10}) \simeq 196$. Il est donc nettement plus avantageux de regrouper les tests !

Exercice 4 (**)

1. Le nombre de tirages possibles de n cartes dans un jeu de 32 vaut $\binom{32}{n}$. Ce jeu est par ailleurs sonstitué de deux As de pique et de 30 cartes « normales ». Si on veut découvrir la supercherie, il faut tirer parmi nos n cartes les deux As de pique (pas de choix) et $n-2$ cartes quelconques parmi les 30 restantes, ce qui fait $\binom{30}{n-2}$ possibilités. La probabilité de découvrir la supercherie est donc de $\dfrac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}$.

2. Dans le cas où $n=4$, la probabilité de découvrir la supercherie sur un tirage est de $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{30\times 29}{2} \times \dfrac{4\times 3\times 2}{32\times 31\times 30\times 29} = \dfrac{3}{248}$. La probabilité de **ne pas** découvrir la supercherie après p tirages est donc de $\left(\dfrac{245}{248}\right)^p$, et on souhaite savoir pour quelle valeur de p cette dernière probabilité devient inférieure à 5%. On résout donc $\left(\dfrac{245}{248}\right)^p \leqslant 0.05 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\ln 0.05}{\ln 245 - \ln 248} \simeq 246.1$. Il faut donc attendre 247 tirages avant d'être sûr à 95% que la supercherie soit découverte ! C'est beaucoup. Il faut déjà attendre 57 tirages pour avoir plus d'une chance sur deux de découvrir le truc...

Exercice 5 (**)

1. Puisqu'on a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \dfrac{n}{2n-k} \times \dfrac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

Exercice 6 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit $X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel

parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n-1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z=1) = npq^{2n-2}(1+q)$.

4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l-k$ au second tour, autrement dit que $X=k$ et $Y=l-k$. On a donc bien $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} P((X=k) \cap (Y=l-k))$.
5. On sait que $X=k$, il y a donc $n-k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y=h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n-k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0; 1; \dots; n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h}p^h(1-p)^{n-k-h}$. On a donc $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X=k)P_{X=k}(Y=l-k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\binom{n-k}{l-k}p^{l-k}q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}p^l q^{2n-k-l}$.
6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
$P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k}p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l}p^l q^{2n-2l}\sum_{k=0}^{k=l}\binom{l}{k}q^{l-k} = \binom{n}{l}p^l(1+q)^l(q^2)^{n-l}$.
7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z=l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.
8. La probabilité qu'un correspondant donné ne soit joint ni au premier, ni au deuxième tour vaut q^2, donc celle qu'on le joigne à un tour ou à l'autre est de $1-q^2$. Comme on répète cette expérience sur chacun des n correspondants, on est bien dans une situation de loi binômiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.

Exercice 7 (***)

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
2. On a $Y=0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y=0) = \frac{1}{2^n}$. Et on a $Y=k$ si la séquence de tirages commence par $NN\dots NB$, avec $k-1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.
3. En effet, $\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.
4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n=1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\frac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} =$

$\dfrac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} +$ $(n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}$
$= \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
$= \dfrac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.
2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \dfrac{1}{2}$.
3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \dfrac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{c+1}{c+2}$. On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$. De même, $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \dfrac{1}{2}$.
4. On a $Z_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$; $P(Z_2 = 2) = \dfrac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1; 2; \dots; p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; …; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p=k)\times P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)=$ $\sum_{k=0}^{k=p}\frac{kc+1}{pc+2}P(Z_p=k)=\frac{c}{pc+2}\sum_{k=0}^{k=p}kP(Z_p=k)+\frac{1}{pc+2}\sum_{k=0}^{k=p}P(Z_p=k)=\frac{cE(Z_p)}{pc+2}+\frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

(c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $P(X_1=1)=P(X_2=2)=\cdots=P(X_n=1)=\frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p)=E(\sum_{k=1}^{k=n}X_k)=\sum_{k=1}^{k=n}E(X_k)=\frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1}=1)=\frac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2}=\frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.