Feuille d'exercices n°17 : Lois usuelles finies

ECE3 Lycée Carnot

4 avril 2012

Exercice 1 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ? Quel est le nombre moyen de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche sans remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V (pas de calcul !).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués avec remise.

Exercice 3 (***)

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soir on regroupe les personnes en groupes de n, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X.
2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$.

Exercice 4 (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué : on remplace une carte (autre que l'As de pique) par un deuxième As de pique. On tire au hasard dans ce jeu (simultanément) n cartes.

1. Quelle est (en fonction de n), la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On suppose $n = 4$ et on tire plusieurs fois de suite 4 cartes au hasard dans le jeu (en remettant à chaque fois les cartes après le tirage). Quel est le nombre minimum de tirages à effectuer avant que la probabilité de découvrir la supercherie n'atteigne 95% ?

Exercice 5 (**)

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \ldots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire celles de X_n.

Exercice 6 (***)

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1+q)$).
4. Démontrer que $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k)$.
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l}\binom{l}{k}$. En déduire que $P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z.
8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2002) (***)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules supplémentaires de la couleur de la boule tirée (c étant évidemment un entier naturel). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n > 2$).

I.Étude du cas $c = 0$.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule blanche (si on ne tire que des boules noires, on posera $Y = 0$).

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Déterminer la loi de Y (on séparera le calcul de $P(Y = 0)$).
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(Y = k) = 1$.
4. Montrer que, pour $x \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indicatrices des événements « On tire une boule blanche au i-ème tirage ». On définit ensuite, pour p compris entre 2 et n, la variable Z_p par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{X_1=0}(X_2 = 0)$; $P_{X_1=0}(X_2 = 1)$; $P_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$:
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.