# Feuille d'exercices n°10 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

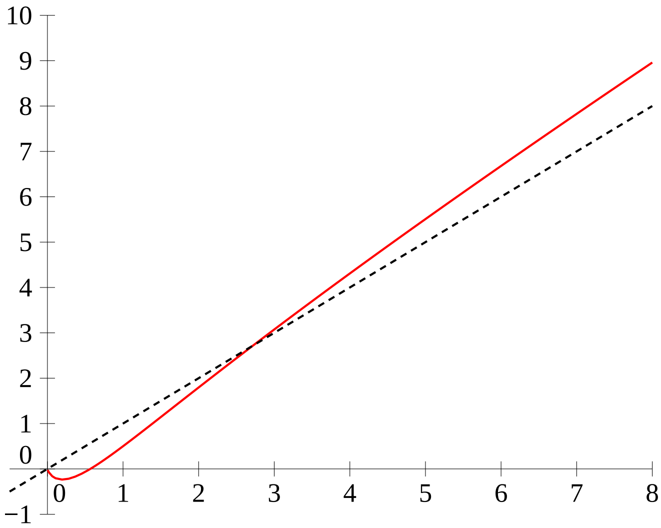
17 janvier 2012

## Exercice 1 (* à **)

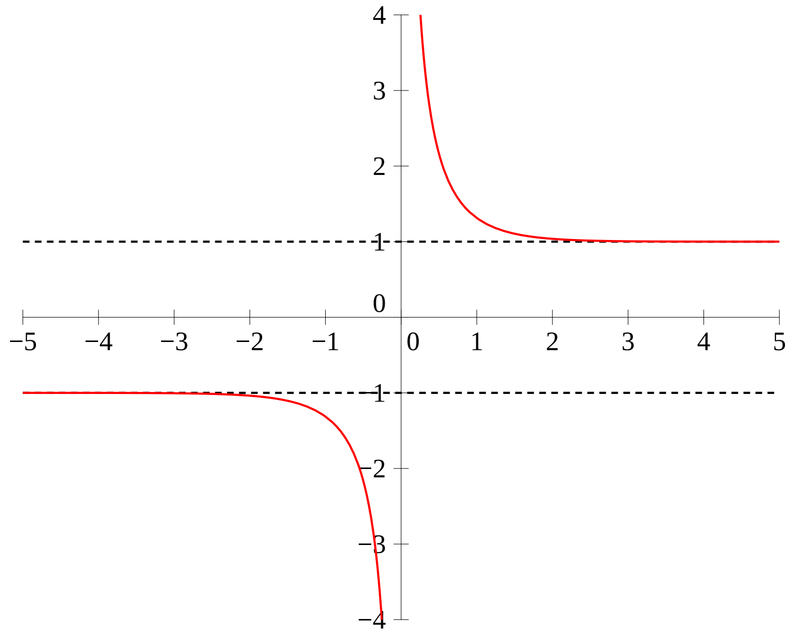
- $\dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = e \times \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4} = +\infty$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2} = +\infty$ par croissance comparée.
- $\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln(x^2+1) - \ln(x^2) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x = 0$.
- $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$ en multipliant par la quantité conjuguée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \ln x}{\sqrt{x}+1} = 0$ (il n'y avait ici pas vraiment de difficulté, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1).
- $x^x = e^{x \ln x}$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$.
- $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)}$. Comme $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$, on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Utilisons également les équivalents : $\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x$, donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} = +\infty$.
- Comme $4x$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, on a $\dfrac{\ln(1+4x)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{4x}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = 4$.
- En posant $X = \sqrt{x}$, on a $x^4 e^{-\sqrt{x}} = \dfrac{X^8}{e^X}$, avec $X$ tendant vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$.
- En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on se ramène exactement à calculer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1$.
- Le numérateur prend pour valeur 11 pour $x = 3$, et $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 9 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} = +\infty$.
- Il vaut mieux commencer par mettre au même dénominateur pour éviter de se retrouver face à une forme indéterminée : $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{x+2-1}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x^2-4}$. Le numérateur ayant pour limite 3 et le dénominateur $0^+$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty$.
- Le numérateur et le dénominateur s'annulant en $x = 1$, on peut commencer par factoriser : si $x \neq 1$, $\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x-1}{x+1}$. Ce nouveau quotient vaut 1 quand $x = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = 1$

## Exercice 2 (** à ***)

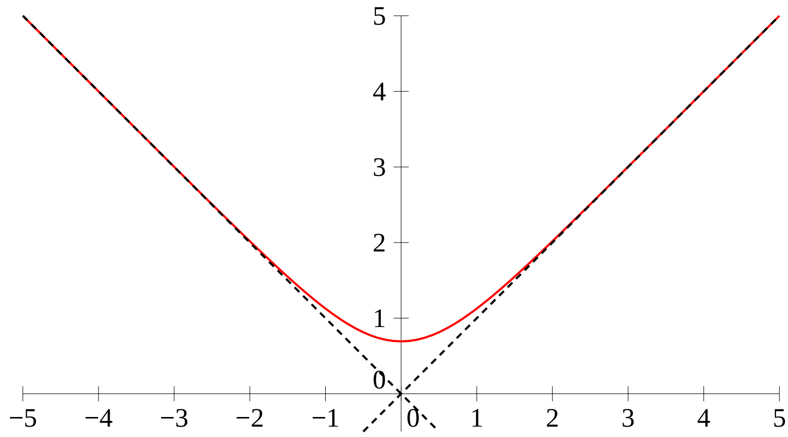
- La fonction $f_1$ et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En $0^+$, la limite de $f_1$ est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 (rappelons que $x\ln(x)$ a pour limite 0 en 0 par croissance comparée) et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Par contre, on peut prolonger $f_1$ par continuité en 0. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{x + \ln x}{1 + \frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, et $\dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x) - x = \dfrac{x + \ln x - x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x - 1}{1 + \frac{1}{x}}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$, la courbe de $f$ admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. Pour compléter, je rajoute pour chaque fonction l'allure de la courbe :




- La fonction n'est pas définie lorsque $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$, ce qui implique $x = -x$, donc $x = 0$, d'où $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$. Les limites de $f_2$ en 0 sont infinies (le numérateur y tend vers 2 et le dénominateur vers 0), donc la courbe admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées. De plus $f_2(x) = \dfrac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 1$, et la courbe admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$. De plus, $f_2$ est une fonction impaire car $f_2(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -f_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = -1$, et on a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

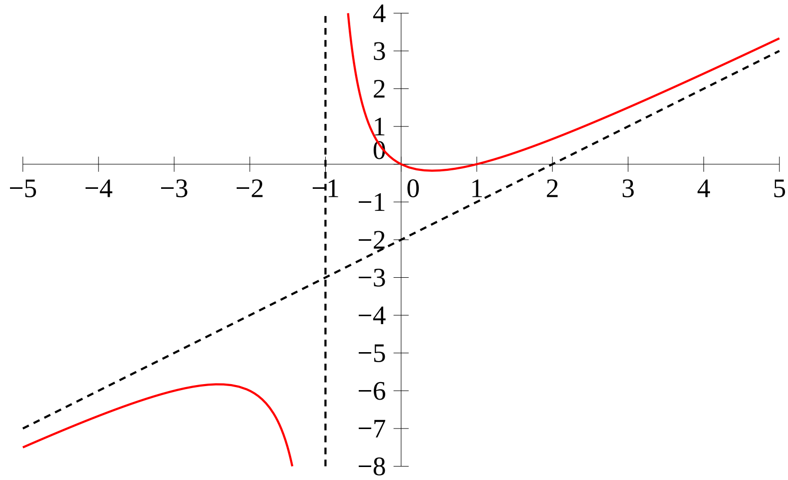



- La fonction $f_3$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que $f_3$ est paire. La limite en $+\infty$ de $f_3$ est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x+\ln(1+e^{-2x})$, donc $\dfrac{f_3(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand $x$ tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

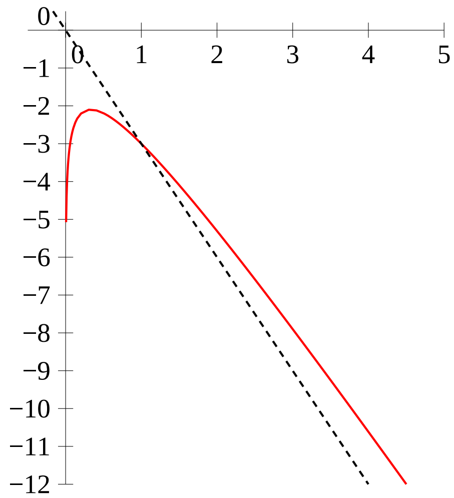



- Un classique : $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En $-1$, le numérateur tend vers $-4$ et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$, donc pour $x \neq 1$, $f_4(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, utilisons les équivalents pour aller plus vite : $f_4(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} = x$, donc les limites sont infinies, et $\dfrac{f_4(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Reste à calculer $f(x) - x = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} =$

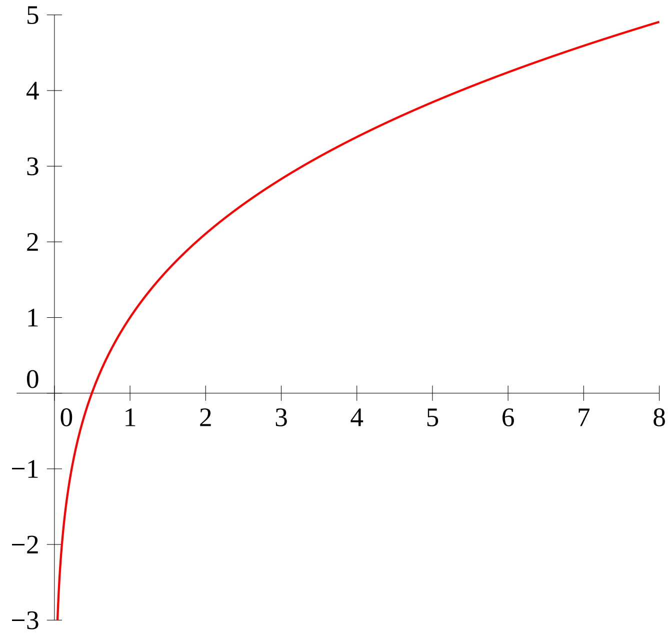
$\dfrac{-2x^2+2x}{x^2-1} \underset{+\infty}{\sim} -2$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les équivalents sont les mêmes).



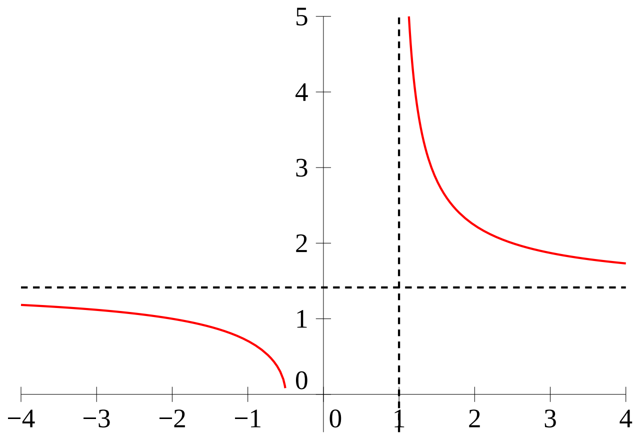

- La fonction $f_5$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, a pour limite $-\infty$ en 0, donc une asymptote verticale, et $+\infty$ en $+\infty$. De plus, $\dfrac{f(x)}{x} = -3 + \dfrac{\ln x}{x}$ a pour limite $-3$, et $f(x)+3x = \ln x$ tend vers $+\infty$, donc on a une branche parabolique de direction $y = -3x$.



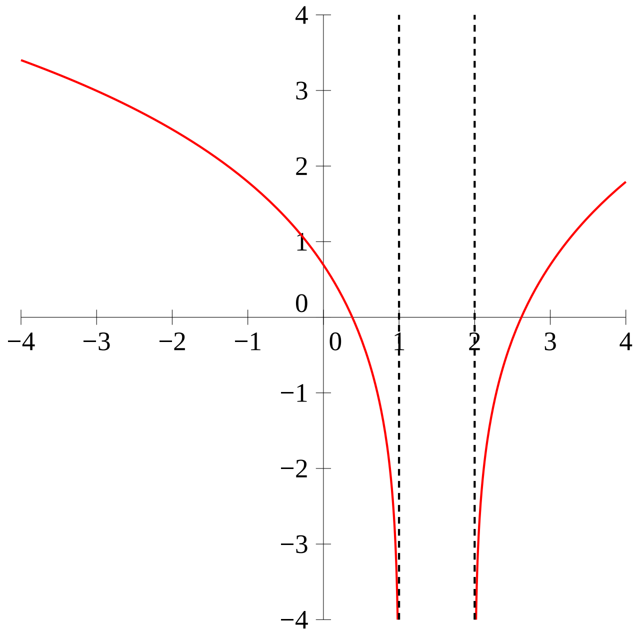

- Comme ci-dessus, le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$ et $\dfrac{f_6(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_6(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(Ox)$.




- La fonction $f_7$ est définie quand $\dfrac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup ]1; +\infty[$. En $-\dfrac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie, il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \to 2$, donc $\underset{x\to\pm\infty_7}{f}(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.




- Enfin, $f_8$ est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_8} = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\dfrac{f_8(x)}{x} = \dfrac{\ln(x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction $(Ox)$.




## Exercice 3 (**)

Pour montrer que $1 + x \geqslant e^x$, il n'y a pas vraiment d'autre choix que d'étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - 1$, donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle atteint donc son maximum pour $x = 0$. Or, $f(0) = 0$, donc on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, d'où $1 + x \leqslant e^x$.

De même, posons $g(x) = 1 + xe^x - e^x$, la fonction $g$ est définie dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. La fonction $g$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et atteint donc un minimum en 0 qui vaut aussi 0, d'où la deuxième inégalité. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, et $\forall x \neq 0$, $1 \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$. Les deux termes extrêmes tendant vers 1 quand $x$ tend vers 0, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Similairement, posons $h(x) = x - \ln(1 + x)$, $h$ est définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$, et $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{x}{1 + x}$, donc la fonction $h$ est décroissante sur $]-1; 0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme d'habitude, elle a un minimum nul en 0, ce dont on déduit que $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Enfin, posons $k(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{1 + x}$, de dérivée $k'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - \dfrac{1 + x - x}{(1 + x)^2} = \dfrac{1 + x - 1}{(1 + x)^2}$. Grande surprise, la fonction admet un minimum en 0, qui vaut 0, d'où la deuxième inégalité. On a alors $\forall x \in ]-1; +\infty[$, $\dfrac{1}{1 + x} \leqslant \dfrac{\ln(1 + x)}{x} \leqslant 1$, donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

## Exercice 4 (*)

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln x}{2}$.
2. $g(x) = x(\ln(1 + x))^4 \underset{+\infty}{\sim} x(\ln x)^4$ (on a le droit d'élever un équivalent à une puissance quelconque) et $g(x) \underset{0}{\sim} x \times x^4 \sim x^5$ en utilisant que $\ln(1 + x) \sim x$.

3. $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. L'exposant a pour limite 1 en $+\infty$ et 0 en 0, donc $h$ a des limites finies égales à $e$ et 1 en $+\infty$ et en 0.
4. $k(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x = x\ln(x(1+\frac{1}{x})) - x\ln x - \ln x = x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x$. La limite du premier terme en $+\infty$ est 1 (cf Exercice 1), donc $k(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln x$. En 0, $k(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$ (tout le reste tendant vers 0).

## Exercice 5 (**)

Le seul problème qui se pose pour la continuité est l'endroit où on change la définition de la fonction.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} 4x^2+5x-4 = -\frac{11}{2}$, donc $f$ ne tend sûrement pas vers 0 quand $x$ tend vers $-\frac{1}{2}$. La fonction $f$ est continue seulement sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$.
2. Il est indispensable de distinguer ce qui se passe en $0^+$ et en $0^-$ : en $0^+$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$ et $f$ a donc pour limite 0 en $0^+$. Par contre, en $0^-$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0, et même beaucoup plus rapidement que $x$, donc $f(x) \underset{0^-}{\sim} \frac{x^2}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Finalement, la fonction $f$ est tout de même continue en 0 puisque continue à gauche et à droite, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. On a $f(x) = x\ln(x^2+1) - x\ln x$ si $x > 0$. Chacun des deux termes tend vers 0 en $0^+$, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Celle-ci est un peu plus difficile : $f(x) = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = -\ln(\sqrt{x}+1)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\ln\sqrt{2}$. La fonction n'est donc pas continue en 1.
5. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ ($x - Ent(x)$ est toujours positif, compris entre 0 et 1) et continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$ puisque les seuls points de discontinuité de la partie entière sont les entiers. Reste à déterminer ce qui se passe pour $n$ : on a $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$, mais $\lim\limits_{x\to n^-} x - Ent(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n + \sqrt{1} = n+1$. La fonction est donc discontinue en tous les entiers.

## Exercice 6 (**)

- La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et $f(x) = \frac{x-1-3}{(x-1)^2} = \frac{x-4}{(x-1)^2}$. La fonction $f$ a donc des limites infinies quand $x$ tend vers 1, elle n'y est pas prolongeable par continuité.
- La fonction $g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. De plus, numérateur et dénominateur ont pour limite 0 en $-1$, on peut donc factoriser par $x+1$ : $g(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = x-3$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -4$, et on peut donc prolonger $g$ par continuité en posant $g(-1) = -4$.
- Ca ressemble au précédent ? C'est pourtant différent puisque cette fois $h$ n'est définie que sur $]-1; +\infty[$, et $h(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} = (x-3)\sqrt{x+1}$. Cette fois-ci, la limite en $-1$ vaut 0, donc on peut prolonger $h$ par continuité en posant $h(-1) = 0$.
- La fonction $k$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et a pour limite 0 en 0, donc est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $k(0) = 0$.

## Exercice 7 (**)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, et $f$ est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc $f'$ est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour $f''$ : $\forall x > 0$, $f''(x) = \left(\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'éeffectuer une récurrence et d'avoir quelques connaissances sur les polynomes. On prouve en fait par récurrence que la $n$-ième dérivée de la fonction $f$ (sur $]0;+\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où $a_n$ est un entier naturel et $P_n$ est un polynome. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0;+\infty[$ et obtenir $\dfrac{x^{a_n}P_n'(x) - a_n n x^{a_n n-1}P_n(x)}{x^{2a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} - \dfrac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrenc. Or, un quotient de polynomes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0, donc la dérivée $n$-ième de $f$ est continue en 0.

## Exercice 8 (*)

Le principe est le même à chaque fois : la fonction étudiée est continue, et les signes des valeurs prises aux extrémités de l'intervalle sont opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule sur l'intervalle.

1. Posons $f(x) = x^{2008} - x^{2007} - 1$, $f(-1) = 1 - (-1) - 1 = 1$, et $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$, donc $f$ s'annule sur $I$. Par dichotomie, on obtient successivement, en notant $a$ la solution cherchée, $f(0) = -1$ donc $a \in [-1;0]$, puis $f(0.5) \simeq -1$ donc $a \in [-1;-0.5]$ etc. Il n'est pas très difficile de se convaincre que la valeur de $a$ est extrêment proche de $-1$ : $x^{2008} - x^{2007} = x^{2007}(x-1)$, avec $x - 1 \in [-2;-1]$, donc $x^{2007}$ doit être compris entre $-0.5$ et 1 pour que l'équation puisse être vérifiée, ce qui implique $0.5 \leqslant (-x)^{2007} \leqslant 1$, soit $\ln 0.5 \leqslant 2007\ln(-x) \leqslant 0$, donc $e^{\frac{0.5}{2007}} \leqslant -x \leqslant 1$, soit $-x = 1$ à 0.001 près. On a donc $x \simeq -1$ à 0.01 près.
2. Posons $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2-5}{x+2}$, $f(1) = 0 - \dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{3}$, et $f(10) = \ln 10 - \dfrac{95}{12} < 0$ (car par exemple $e^4 > 2^4 > 16$, donc $4 > \ln 10$, et $\dfrac{95}{12} > 4 > \ln 10$), donc $f$ s'annule sur $I$. Plutôt que de couper exactement en 2, faisons une dichotomie avec des valeurs pas trop affreuses : $f(5) \simeq -1.24$, donc $a \in [1;5]$, puis $f(3) \simeq 0.30$, donc $a \in [3;5]$ ; $f(4) \simeq -0.44$ donc $a \in [3;4]$ ; $f(3.5) \simeq -0.6$ donc $a \in [3;3.5]$ ; $f(3.25) \simeq 0.12$ donc $a \in [3.25;3.5]$ ; $f(3.375) \simeq 0.03$ donc $a \in [3.375;3.5]$ ; $f(3.44) \simeq -0.02$ donc $a \in [3.375;3.44]$ ; $f(3.41) \simeq 0.001$, donc $a \in [3.41;3.44]$ ; et enfin $f(3.425) \simeq -0.001$ donc $a \in [3.41;3.425]$. On a donc $a \simeq 3.42$ à 0.01 près.
3. Posons $f(x) = 3x - 1 - \ln(2+x^2)$, $f(0) = 0 - 1 - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 3 - 1 - \ln 3 = 2 - \ln 3 > 0$, car $e^2 > 3$, donc $\ln 3 < 2$. La fonction s'annule donc sur $I$. Toujours le même principe, je vais aller un peu plus vite : on calcule $f(0.5) \simeq -0.31$, puis $f(0.75) \simeq 0.31$ ; $f(0.625) \simeq 0.003$ ; $f(0.56) \simeq -0.16$ ; $f(0.59) \simeq -0.08$ et $f(0.61) \simeq -0.03$, dont on déduit que $a \simeq 0.62$ à 0.01 près. Constatons que quand on tombe au milieu des calculs sur une valeur très proche de 0, on a de bonnes chances d'être très près de la solution cherchée...
4. Posons $f(x) = e^x - 2 - x$, $f(\ln 2) = 2 - 2 - \ln 2 < 0$, et $f(2\ln 2) = 4 - 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc $f$ s'annule sur $I$. Ici, les bornes de l'intervalles sont moyennement pratiques, mais elles valent environ 0.7 et 1.4, ce qui permet de couper en 1 puis de prendre des valeurs plus rondes

ensuite : $f(1) \simeq -0.28$ ; $f(1.2) \simeq 0.12$ ; $f(1.1) \simeq -0.10$ ; $f(1.15) \simeq 0.008$ ; $f(1.125) \simeq -0.04$ ; $f(1.14) \simeq -0.01$, donc $a \simeq 1.14$ à 0.01 près.

5. Posons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Ca ne marche pas ? Si, car $f(0) = 1$, donc $f$ s'annule en fait au moins deux fois sur $I$ : une fois sur $[-1;0]$ et une autre sur $[0;1]$. Pour la dichotomie, contentons-nous de déterminer une valeur approchée de la solutions se trouvant dans $[0;1]$ (on peut naturellement trouver également une approximation de la deuxième racine dont on connait l'existence) : $f(0.5) = .375$ ; $f(0.75) \simeq -0.27$ ; $f(0.625) \simeq 0.07$ ; $f(0.69) \simeq -0.10$ ; $f(0.66) \simeq -0.02$ ; $f(0.64) \simeq 0.03$, donc $a \simeq 0.65$ à 0.01 près (pour les curieux, la racine appartenant à $[-1;0]$ vaut environ $-0.53$).

## Exercice 9 (***)

1. La fonction $f_n$ étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0;+\infty[$, elle l'est également. Comme de plus elle est continue, $f(0) = -4$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif $u_n$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. $u_0$ est solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \dfrac{1}{3}$, donc $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Pour $n = 1$, l'équation devient $9x^2 + x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$, et admet deux racines dont une strictement positive (d'après la question précédente) qui ne peut être que $u_1 = \dfrac{-1+\sqrt{145}}{18} \simeq 0.61$. De même, $u_2$ est solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \simeq 0.63$. Pour vérifier que $u_n < \dfrac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9 \times \dfrac{4}{9} - 4 = \dfrac{2^n}{3^n} > 0$, et d'appliquer la croissance stricte de la fonction $f_n$ à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)$
3. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - x^n - 9x^2 + 4 = x^n(x-1)$. Cette expression étant négative si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in ]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. On a notamment, puisque $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce dont on déduit via stricte croissance de $f_{n+1}$ que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
5. La suite étant croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$, elle converge.
6. Comme $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$, $0 < u_n^n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, donc via le théorème des gendarmes (et le fait que le membre de droite est une suite géométrique de raison inférieure à 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$). On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \dfrac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

## Exercice 10 (***)

1. On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1 + \ln 3 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $f$ s'annule sur l'intervalle $[1;3]$.
2. La fonction étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, elle l'est également, donc est injective, et l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une solution.
3. On calcule $f(2) \simeq 0.69$, puis $f(1.5) \simeq -0.09$ ; $f(1.75) \simeq 0.31$ ; $f(1.625) \simeq 0.11$ ; $f(1.56) \simeq .004$ ; $f(1.53) \simeq -0.04$ et $f(1.55) \simeq -0.01$, donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ vaut 1.56 à $10^{-2}$ près.

4. On a déjà vu que $f$ était strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée), donc $f$ est bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer que $g$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, et de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Un petit coup de croissance comparée et on constate que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, on peut donc affirmer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)} = 1$ (composée de limites), c'est-à-dire que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{g(t)} = 1$ (puisque par définition de la réciproque $f(g(t)) = t$. Autrement dit, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t$.

## Exercice 11 (**)

1. La fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc par théorème de la bijection, $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. C'est une conséquence immédiate de la bijectivité de $f$.
3. Par définition, $f(x_n) < f(x_{n+1})$, donc par stricte croissance de $f$, $x_n < x_{n+1}$, et la suite $(x_n)$ est strictement croissante.
4. C'est un calcul d'images : $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \geqslant n$ si $n \geqslant 1$, donc on a $f(x_n) \leqslant f(\ln n)$, d'où $x_n \leqslant \ln n$. De même, $f(\ln(n - \ln n)) = e^{\ln(n-\ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) = n - \ln \frac{n}{n - \ln n} < n$ puisque $\frac{n}{n - \ln n} < 1$. On en déduit de même que $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n$.
5. Comme $\lim_{n\to+\infty} n - \ln n = +\infty$ (croissance comparée), on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n - \ln n) = +\infty$, d'où par comparaison $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. De plus, $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1$, avec $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n}}{\ln n}$. La quotient a pour limite 0, donc la suite $(\frac{x_n}{\ln n})$ est encadrée par deux suites de limite 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $x_n \sim \ln n$.