Feuille d'exercices n°10 : Limites, continuité

ECE3 Lycée Carnot

8 janvier 2012

Exercice 1 (* à **)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$
- $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$
- $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$
- $f_2(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
- $f_3(x) = \ln(e^x+e^{-x})$
- $f_4(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$
- $f_5(x) = -3x+\ln x$
- $f_6(x) = \sqrt{x}+\ln x$
- $f_7(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
- $f_8(x) = \ln(x^2-3x+2)$

Exercice 3 (**)

Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Montrer que, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4 (*)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2}$ en 0 et en $+\infty$
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4$ en 0 et en $+\infty$
3. $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $k(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$

Exercice 5 (**)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 + 5x - 4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x \ln \dfrac{x^2+1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
5. $f(x) = x + \sqrt{x - Ent(x)}$

Exercice 6 (**)

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

- $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$
- $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$
- $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$
- $k(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$

Exercice 7 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue (mais là c'est du ****).

Exercice 8 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2012} - x^{2011} = 1$ sur $I = [-1; 1]$.
2. $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x+2}$ sur $I = [1; 10]$.

3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0; 1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2; 2\ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1; 1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite u_n ?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite qu'on notera l.
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l.

Exercice 10 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Calculez $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède en fait une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide de la calculatrice et en procédant par dichotomie (décrivez les étapes), déterminez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On note g la réciproque de f, déterminer la continuité, le tableau de variation et les limites de g.
5. Déterminez $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)}$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 11 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis un équivalent simple de x_n.