

Feuille d'exercices n°18 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 mai 2012

Exercice 1 (**)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}
\end{array}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaître un $\frac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = a \\ -3y = a - b \\ -2y - z = a - c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = a \\ y = \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \\ z = c - a - 2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = a + y - z \\ y = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z = -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = a + b - c \\ y = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z = -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{cases} \end{aligned}$$

On vient de résoudre le système $AX = B$, dont la solution est $X = A^{-1}B$. On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (**)

Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = 5A - 6I$, donc $5A - A^2 = A(5I - A) = 6I$, dont on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)$, soit $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système qui suit est de la forme $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc l'unique solution du système est $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &
\end{array}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice

diagonale que nous noterons D . On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n , on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc

$$A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ soit } A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (***)

1. On obtient $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $K^2 = -I$.

2. On a donc $K \times (-K) = I$, d'où $K^{-1} = -K$.

3. Calculons $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = 2aM - (a^2 + b^2)I$.

4. Il faut avoir $a^2 + b^2 \neq 0$ pour pouvoir écrire $M^2 - 2aM = M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$, donc $M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \frac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$.

5. La matrice A est égale à $\sqrt{2}I + K$, son inverse vaut donc $\frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$, c'est-à-dire $A^{-1} =$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^k) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \dots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est

inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \dots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide

calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M +$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (***)

1. Puisqu'on sait qu'il y a une boule blanche dans l'urne U_1 avant qu'on ne commence les tirages,

X_0 est une variable constante égale à 1. Autrement dit, $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Pour avoir $X_{n+1} = 0$, on doit nécessairement avoir $X_n = 1$ (si l'urne contenait 2 boules blanches avant le tirage numéro $n + 1$, elle en contiendra toujours une après le tirage; et si elle ne contenait pas de boule blanche, c'est qu'elle contenait les deux boules noires et que les deux boules blanches étaient dans U_2 , auquel cas on va nécessairement échanger une boule noire avec une blanche pour obtenir $X_{n+1} = 1$). Il faut de plus, en partant de la situation $X_n = 1$ (une boule blanche et une boule noire dans chaque urne), échanger la boule blanche de U_1 avec la noire de U_2 , ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{4}$ (une chance sur deux de choisir la blanche à échanger dans U_1 , une chance sur deux de choisir la noire dans U_2). La formule demandée en découle. Un raisonnement essentiellement identique mène à la relation $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}P(X_n = 1)$. Pour la dernière relation, il est préférable d'être rigoureux et d'appliquer la formule des probabilités totales : $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2) \times P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)$. Or, $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = 1$ (dans les deux cas, on est certains d'échanger une boule blanche avec une noire pour rééquilibrer les deux urnes), et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ (il faut échanger deux boules de la même couleur, donc tirer soit la blanche dans chacune des deux urnes, soit la noire dans chacune des deux, ce qui donne deux cas de probabilité $\frac{1}{4}$ chacun). Finalement, $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$.

3. Il découle immédiatement des relations précédentes que $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

4. C'est la récurrence évidente qu'on fait à chaque fois : $C_0 = A^0 C_0$ est évidente, et en supposant la propriété vraie au rang n , alors $C_{n+1} = AC_n = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$, ce qui achève la récurrence.

5. Pour changer un peu, appliquons la méthode du système :
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -2y + 4z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}.$$

La différence des deux lignes extrêmes donne tout de suite $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$. La deuxième équation

donne quant à elle $y = -\frac{1}{2}b + 2z$. En remplaçant dans la dernière équation, on a alors $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b + 2z + z = c$, soit $z = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c$. Il ne reste plus qu'à calculer $y = -\frac{1}{2}b + 2z = \frac{1}{3}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c$.

La matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

6. Un calcul peu palpitant donne $AP = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Une petite récurrence pour la forme $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et si on suppose la formule vraie au rang n , alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^n P^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n DP^{-1} =$

$PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Comme $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule $PD^n =$

$\begin{pmatrix} 0 & (-\frac{1}{2})^n & 1 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^{n-1} & 4 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 1 \end{pmatrix}$, puis enfin $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Comme $C_n = A^n \times C_0$, on en déduit que $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$ et

$P(X_n = 1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. quand n tend vers $+\infty$, les probabilités tendent vers $\frac{1}{6}$ pour

$P(X_n = 0)$ et $P(X_n = 2)$ et vers $\frac{2}{3}$ pour $P(X_n = 1)$. Autrement dit, à long terme, on a deux chances sur trois que les urnes soient équilibrées, et une chance sur six que l'urne 1 (de même pour l'urne 2) contienne les deux boules blanches.