Feuille d'exercices n°18 : Inversion de matrices

ECE3 Lycée Carnot

2 mai 2012

Exercice 1 (**)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (**)

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}. Résoudre en utilisant ce qui précède le système suivant :

$$\begin{cases} \phantom{-x +{}} 2y + 4z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 4 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 5 (***)

On considère la matrice carrée $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.
4. En déduire que si a et b ne sont pas tous les deux nuls, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
5. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (***)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune initialement une boule blanche et une boule noire, et on effectue n fois de suite l'expérience suivante : on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on échange les deux boules tirées. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne U_1 à l'issue de ces n expériences. On notera également C_n la matrice-colonne $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

1. Que vaut la matrice C_0 ?
2. Prouver que $P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}P(X_n = 1)$. Déterminer de même $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
3. En déduire une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C_{n+1} = AC_n$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = A^n C_0$.
5. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
6. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, en déduire la loi de la variable X_n. Vers quelles limites les probabilités $P(X_n = k)$ convergent-elles ?