Feuille d'exercices n°19 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

15 mai 2012

Exercice 1 (* à **)

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$$

$$I_4 = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\ dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\ dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1$$

$$I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\ dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$$

$$I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5}\ dz = \left[-\frac{1}{5}e^{-z^5}\right]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}(e - \frac{1}{e^{32}})$$

$$I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1\ dx + \int_0^1 0\ dx + \int_1^2 1\ dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2\ dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\ ds = \left[\frac{1}{6}(\ln s)^6\right]_1^e = \frac{1}{6}$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t} + 2)\right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

$$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{9}(9^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{52}{9}$$

$$I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\ dv = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1} - e^{-3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}\right)$$

$$I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2 - 2q)^4}\ dq = \left[\frac{1}{6}(q^2 - 2q)^{-3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{4} - 3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4} - 1\right)^{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right) = 0$$

$$I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\ dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2} - e^{-1}) = 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$$

Exercice 2 (**)

$$I_1 = \int_{-1}^{1} xe^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}(e^3 + e^{-3}) - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{4}{9}e^{-3}$$

où on a posé $u'(x) = e^{3x}$; $v(x) = x$; $u(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et $v'(x) = 1$.

$$I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\ ds = \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\ln s\right]_1^4 - \sqrt{3}\int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{s}\ ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}4^{\frac{3}{2}}\ln 4 - \sqrt{3}\left[\frac{4}{9}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{32}{9}\sqrt{3} + \frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(32\ln 2 - \frac{28}{3}\right) \quad \text{(on a utilisé } 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8\text{)}$$

où on a posé $u'(s) = \sqrt{s}$; $v(s) = \ln s$; $u(s) = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}$ et $v'(x) = \frac{1}{s}$.

$$I_3 = \int_1^e z^2(\ln z)^3\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^3\right]_1^e - \int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^2\right]_1^e + \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \left[\frac{2}{9}z^3\ln z\right]_1^e - \frac{2}{9}\int_1^e z^2\ dz = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^e = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$$

où on a posé $u'(z) = z^2$; $v(z) = (\ln z)^3$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{3}{z}(\ln z)^2$
puis $u'(z) = z^2$; $v(z) = (\ln z)^2$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{2}{z}\ln z$
et enfin $u'(z) = z^2$; $v(z) = \ln z$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{1}{z}$.

$$I_4 = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\ dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + x\right)\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{2}x^3 + 1\ dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{1}{8}x^4 + x\right]_1^{e^2}$$

$$= e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8}e^8 - e^2 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8}$$

où on a posé $u'(x) = 2x^3 + 1$; $v(x) = \ln x$; $u(x) = \frac{1}{2}x^4 + x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$I_5 = \int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}\ dx = \left[\frac{1}{2}(1+x+x^2)e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2x)e^{2x}\ dx = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\ dx$$

$$= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = e^2 - \frac{1}{2}$$

où on a posé $u'(x) = e^{2x}$; $v(x) = 1 + x + x^2$; $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 1 + 2x$
puis $u'(x) = e^{2x}$; $v(x) = 1 + 2x$; $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2$.

$$I_6 = \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\ dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\ dt = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2$$

$$= 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

où on a posé $u'(t) = 1$; $v(t) = \ln(1 + \frac{1}{t})$; $u(t) = t$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2(1+\frac{1}{t})} = -\frac{1}{t(t+1)}$.

$$I_7 = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\,ds = \left[s(s+1)\ln(1+\frac{1}{s})\right]_1^2 + \int_1^2 1\,ds = 6\ln\frac{3}{2} - 2\ln 2 + 1 = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$$

où on a posé $u'(s) = 1+2s$; $v(s) = \ln(1+\frac{1}{s})$; $u(s) = s+s^2 = s(s+1)$ et $v'(s) = -\dfrac{1}{s^2(1+\frac{1}{s})}$.

Exercice 3 (**)

Pour I_1, on pose $u = t+1$, donc $du = dt$, et les bornes deviennent 1 et 2 :

$$I_1 = \int_0^1 (t-2)(t+1)^5\,dt = \int_1^2 (u-3)u^5\,du = \left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{2}\right]_1^2 = \frac{128}{7} - 32 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{193}{14}$$

Pour I_2, on pose $u = t^3+8$, donc $du = 3t^2\,dt$, et les bornes deviennent 8 et 16 :

$$I_2 = \int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}\,dt = \int_8^{16} \frac{1}{3u}\,du = \left[\frac{1}{3}\ln(3u)\right]_8^{16} = \frac{1}{3}(\ln 48 - \ln 24) = \frac{1}{3}(\ln 3 + 4\ln 2 - \ln 3 - 3\ln 2) = \frac{\ln 2}{3}$$

Pour I_3, on pose $t = \dfrac{x}{x+1}$, donc $dt = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, et les bornes deviennent $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$:

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{3}$$

Pour I_4, on pose $u = s^3$, donc $du = 3s^2 ds$, et les bornes deviennent 1 et 8 :

$$I_4 = \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}\,du = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,du$$
$$= \frac{1}{3}[\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \frac{4\ln 2 - 2\ln 3}{3}$$

Pour I_5, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, et les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$:

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\,du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u\,du = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$$

Pour I_6, on pose $u = \ln t$, donc $du = \dfrac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 0 et 1 :

$$I_6 = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t + 1}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

Exercice 4 (*)

1. Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$, on peut écrire

   $$a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax^2 + ax - 6a + bx + 3b + cx - 2c}{x^2+x-6} = \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a+3b-2c)}{x^2+x-6}$$

   Par identification, on a $a = 3$ puis $b+c = -7$ et $3b-2c = -7$, dont on déduit $b = \dfrac{3}{2}c$ en faisant la différence puis $b = -\dfrac{21}{5}$ et $c = -\dfrac{14}{5}$.

2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive : $F(x) = 3x - \frac{21}{5}\ln(2-x) - \frac{14}{5}\ln(x+3)$. Si on veut obtenir la primitive de f s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire $3 - \frac{14}{5}\ln 4$.

Exercice 5 (**)

1. La fonction intégrée étant positive sur $[0;1]$, la suite I_n est positive. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $(1-x)^n e^x \leqslant e$, donc $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\,dx = \frac{e}{n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que I_n converge vers 0.
2. On effectue une IPP en dérivant l'exponentielle (pour une fois) et en primitivant la puissance : $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\,dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. On déduit de la question précédente que $I_0 = \frac{1}{1!} + I_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + I_2 = \cdots = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!} + I_n$. Or, on a $I_0 = \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = e - \frac{1}{0!}$. On en déduit donc que $e - I_n = \sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$, ce qui en passant à la limite donne bien $e = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 6 (***)

1. Par une intégration par parties désormais classique ($u'(x) = x^2$; $v(x) = \ln x$), on a $I_1 = \int_1^e x^2\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. On a donc $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1;e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1;e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1;e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\,dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique une nouvelle fois, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$:

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3}I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$.

Exercice 7 (**)

- Si on note $g(t) = e^{-3\sqrt{2\ln t}}$, et G une primitive de g sur $]1;+\infty[$ (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction g n'étant pas définie pour $x < 1$ ...), on aura (par définition de l'intégrale) $f_1(x) =$

$G(2x) - G(2)$, donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $f_1'(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$

- Même principe que ci-dessus : on note $g(t) = \dfrac{1}{1+t+t^2}$ (qui est pour le coup définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et G une primitive de g, on a alors $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$, donc $f_2'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2+x^4} - \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
- Posons donc $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ (encore une fois définie sur $\mathbb{R}$) et G une primitive ; $f_3(x) = G(-x) - G(x)$, donc $f_3'(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$
- Cette fois, $g(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ (définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$), et f_4 est définie si $x > 1$ (si x est entre 0 et 1, $\sqrt{x} < 1$ et $e^x > 1$, donc il y a un problème en 1 pour intégrer), de dérivée $(G(e^x) - G(\sqrt{x}))' = e^x g(e^x) - \dfrac{g(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\ln(2\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\ln(2) + \ln(x)}$.

Exercice 8 (***)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 9 (** à ***)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+$

$x)\, dx = \int_1^2 \ln u\, du = [x \ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 10 (EDHEC 2004) (**)

1. Il suffit pour cela de dire que le dénominateur $1+t+t^n$ ne s'annule jamais sut l'intervalle $[0;1]$ (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$, ce qui assure l'existence de son intégrale.

2. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$; et $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
   (b) Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.
   (c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

4. (a) En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   (b) Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t+t^n} = \dfrac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
   (c) On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donnes $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 11 (ESCP 92) (****)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.
   (b) On a $f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\displaystyle\int_0^1 t^k \dfrac{e^{-tx}}{x}\, dx = -\dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{k+1}{x} f_k(x)$.

(b) On a $f_0(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\, dt = \left[-\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} f_0(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \dfrac{2}{x} f_1(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

(c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

(d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}\left(k + 1 - \dfrac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k+1}{x} f_k \sim \dfrac{k+1}{x}\dfrac{k!}{x^{k+1}} \sim \dfrac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\, dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.

(b) On vient décrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}} h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x} f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\, dt - \int_0^1 t^k\, dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\, dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1} x\, dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \dfrac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f_k'(x) = -\dfrac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$.