Feuilles d'exercices n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

28 septembre 2011

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $x + 5 > 0$, soit $x > -5$, donc $\mathcal{D}_f =]-5; +\infty[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -2 et 2. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 0] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f estpaire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dfrac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \dfrac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \dfrac{1}{(2x - x^3)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (* à **)

1. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; on a donc $f(1) = 1 + \ln 2$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, et l'équation de la tangente recherchée est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 + \ln 2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + \ln 2$.

2. $f'(x) = \dfrac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} - 1 = \dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$ (inutile de s'embêter à mettre au même dénominateur si on n'a pas l'intention d'étudier ensuite les variations de la fonction). On a donc $f(1) = \dfrac{2}{1+e} - 1 = \dfrac{1-e}{1+e}$ et $f'(1) = \dfrac{1-e}{(1+e)^2} - 1 = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}$, donc l'équation de la tangente est $y = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}(x-1) + \dfrac{1-e}{1+e} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{e(e+3)+(1-e)(1+e)}{(1+e)^2} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{3e+1}{(1+e)^2}$.
3. $f'(x) = \dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{2x-\frac{3}{x}} = \dfrac{2x^2+3}{x(2x^2-3)}$. La fonction n'étant pas définie en 1, on ne peut pas calculer l'équation d'une tangente qui n'existe pas !
4. $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2(1-x)e^{2x}}{(x^2-1)^2}$. Cette fonction n'étant même pas définie en 1, elle ne risque pas d'y admettre une tangente, donc on peut arrêter là pour les calculs.
5. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, donc $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}\ln x} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$, la tangente est donc horizontale d'équation $y = 1$.

Exercice 4 (** à ***)

1. Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux *ln* de gauche pour n'avoir qu'un seul *ln* de chaque côté, ce qui donne $\ln(x^2+2x-3) = \ln 4$, donc $x^2+2x-7=0$. Ce trinôme a pour discriminant $\delta = 4+28 = 32$, et admet donc deux racines $x_1 + \dfrac{-2+4\sqrt{2}}{2} = -1+2\sqrt{2}$, et $x_2 = -2-2\sqrt{2}$. La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2}-1\}$.
2. Les puissances quelconques n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+^*$, on ne travaille qu'avec des nombres positifs, et on peut passer au ln : $3\times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geqslant 4\ln 2$, soit $(3x-8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 2-\ln 3}{3\ln 2};+\infty\right[$.
3. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3>0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2};4\right[$.
4. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4\times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}\right\}$.
5. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\dfrac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \dfrac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1;4\}$.
6. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine

de définition $]0;+\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.

7. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3+3X^2-X-3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3+3X^2-X-3) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2+4X+3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
8. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2-3X-4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9+16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x\ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \dfrac{\ln 8}{3\ln 4}$. Comme $\dfrac{\ln 4}{3\ln 8} = \dfrac{2\ln 2}{9\ln 2} = \dfrac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty;\dfrac{2}{9}\right]$.
9. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2-520x+10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2-40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \dfrac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20;500);(500;20)\}$.

Exercice 5 (**)

1. La fonction $x \mapsto -2x+3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0;+\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\dfrac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x+2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car e^x-3 ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty;\ln 3]$, $x \mapsto e^x-3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty;0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;\ln 3]$. Sur $[\ln 3;+\infty[$, $x \mapsto e^x-3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e;+\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e;+\infty[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$. La fonction

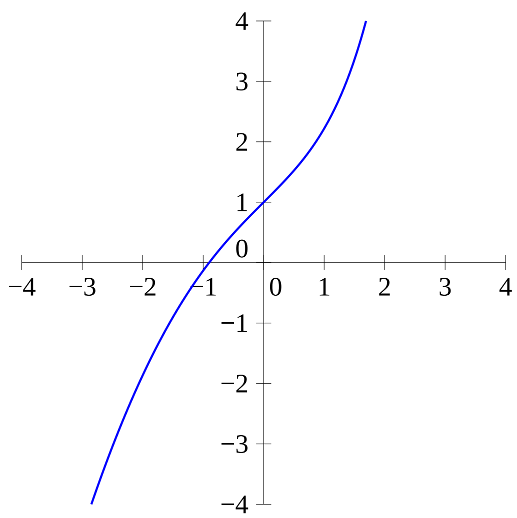
$x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$, ainsi que sur $]1;+\infty[$.

Exercice 6 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

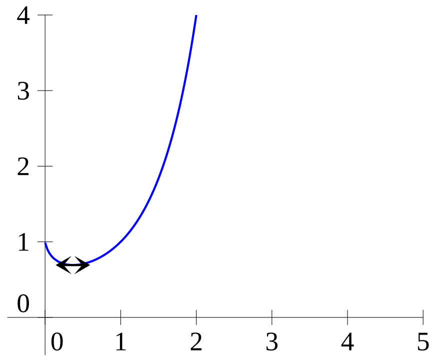
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



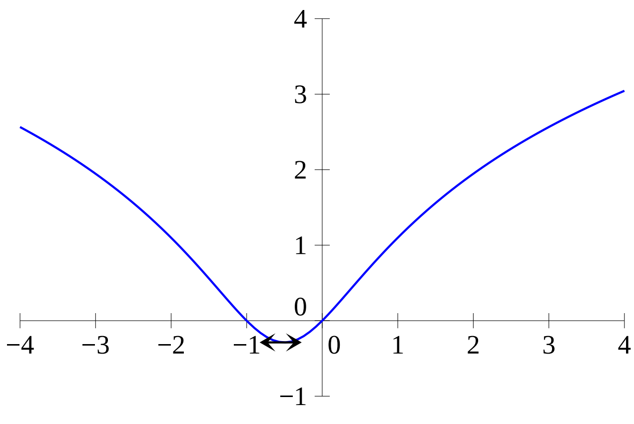
2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
					$+\infty$
f	1	$\searrow$		$\nearrow$	
			$e^{-\frac{1}{e}}$		



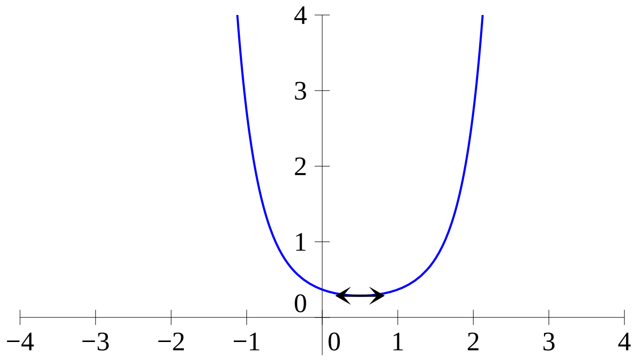
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1+x+x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+x+x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
	$+\infty$				$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\ln 3 - \ln 4$		



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-x-1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$



5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. D'où le tableau :

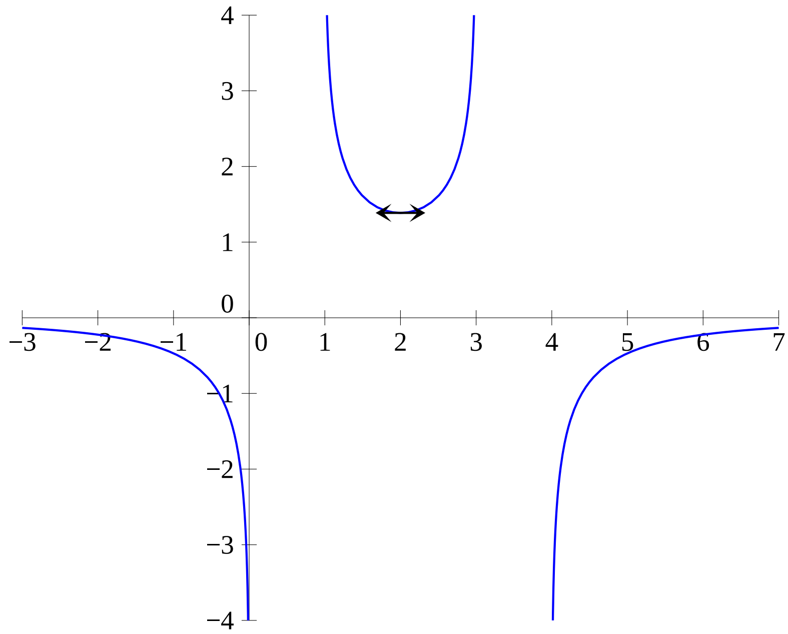
x		0		1		3		4	
x^2-4x	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4x+3	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;3[\cup]4;+\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln\dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

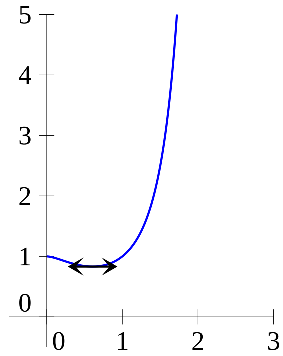
Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	0



6. Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x\ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2\ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2\ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 7 (* à **)

1. $|x-3| \geqslant 5$ signifie que $x-3 \geqslant 5$ ou $x-3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty;-2] \cup [8;+\infty[$.

2. $|2x-4| = |3x+2| \leftrightarrow 2x-4 = 3x+2$ ou $2x-4 = -3x-2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6; \frac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \frac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1; 3; 5; 7\}$.
4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthodes fiables pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert 4x+2\rvert$		$-4x-2$	0	$4x+2$		$4x+2$	
$\lvert x-2\rvert - \lvert 4x+2\rvert$		$3x+4$		$-5x$		$-3x-4$	

Comme $3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x + 4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$.

6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		7		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$	0	$-3+x$		$-3+x$	
$\lvert x-7\rvert$		$-x+7$		$-x+7$		$-x+7$	0	$x-7$	
$\lvert 2x-3\rvert + \lvert 3-x\rvert - \lvert x-7\rvert$		$-2x-1$		$2x-7$		$4x-13$		$2x+1$	

Ne restent plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenus appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x - 7 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x - 13 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right\}$.

7. $|e^x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x < 4 \Leftrightarrow \ln 2 < x < \ln 4$, donc $\mathcal{S} =]\ln 2; \ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5; +\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2 - 1| = (x-5)^2$, soit $x^2 - 1 = x^2 - 10x + 25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x = 26$, dont la solution n'appartient pas à notre intervalle d'étude, d'où $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 8 (**)

1. Un petit tableau permet de régler cette question très vite :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert$		$-x-5$	0	$x+5$		$x+5$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+5\rvert$		$-2x-3$		7		$2x+3$	

On a donc $|x-2|+|x+5| = \begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x \leqslant -5 \\ 7 & \text{si} \quad -5 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.

2. Cette fois-ci, il suffit d'étudier le signe du trinome à l'intérieur de la valeur absolue. Celui-ci a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{6} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$, donc $|3x^2 - 5x + 2| = 3x^2 - 5x + 2$ si $x \in \left]-\infty; \dfrac{2}{3}\right] \cup [1; +\infty[$, et $|3x^2 - 5x + 2| = -3x^2 + 5x - 2$ si $x \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$.
3. Il n'y a même pas besoin de calculs ici : $\ln(|x^2-4|) = \ln(x^2-4)$ si $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, et $\ln(|x^2-4|) = \ln(-x^2+4)$ si $x \in]-2; 2[$ (et si $x = 2$ ou $x = -2$, l'expression n'est pas définie).
4. Constatons que $\sqrt{2x^2 - 8x + 8} = \sqrt{2(x-2)^2} = |\sqrt{2}(x-2)|$. reste à faire un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$\lvert 2-3x\rvert$		$2-3x$	0	$-2+3x$		$-2+3x$	
$\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$		$-\sqrt{2}(x-2)$		$-\sqrt{2}(x-2)$	0	$\sqrt{2}(x-2)$	
$\lvert 2-3x\rvert+\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$		$(-3+\sqrt{2})x+2-2\sqrt{2}$		$(3+\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$		$(3-\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$	

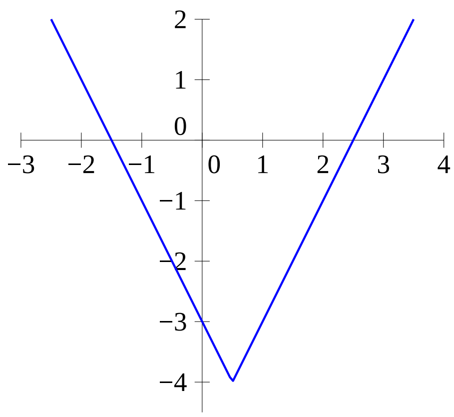
Je suis certain que vous serez capable de faire une jolie phrase de conclusion tous seuls si vous le souhaitez.

5. La valeur absolue du dénominateur est totalement superflue puisque celui-ci est toujours strictement positif. On a donc $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = \dfrac{e^{-x-1}}{e^{x+1}} = e^{-2x-2}$ si $x \leqslant -1$; et $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = 1$ si $x \geqslant -1$.

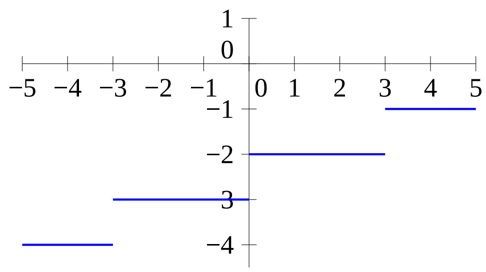
Exercice 9 (** à ***)

1. La fonction $x \mapsto 2x - 1$ est toujours croissante, et s'annule en $\dfrac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

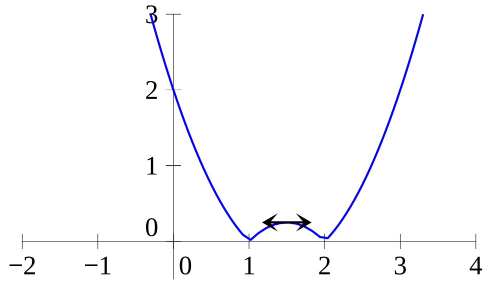


2. Soit $p \in \mathbb{N}$, les réels antécédents de p par f sont les solutions de l'encadrement $p \leqslant \frac{x}{3} - 2 < p+1$, ce qui revient à $3p + 6 \leqslant x < 3p + 9$. La fonction f prend donc la valeur p sur les intervalles de la forme $[3p + 6; 3p + 9[$: elle est nulle sur $[6; 9[$, vaut 1 sur $[9; 12[$ etc. Voici sa courbe représentative :



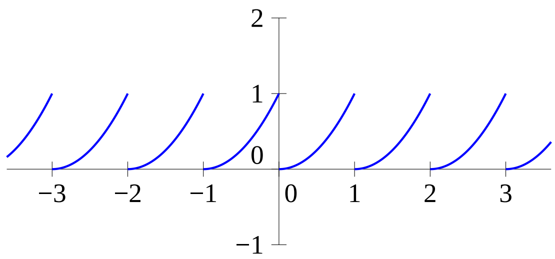
3. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \frac{3}{2}$, de valeur $\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f		0	$\frac{1}{4}$	0	



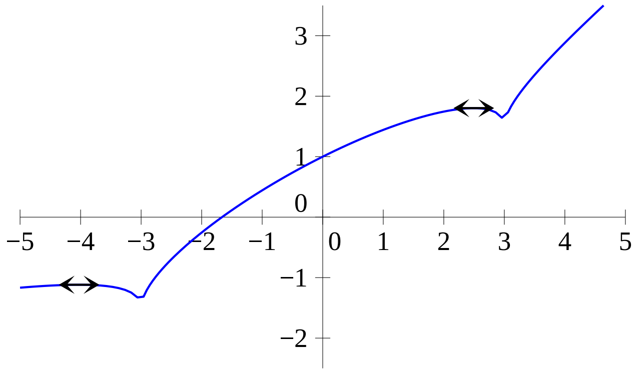
4. Si on connait bien son cours, on doit se rappeler y avoir vu que la fonction partie fractionnaire était périodique de période 1. Or la fonction f n'est autre que le carré de la partie fractionnaire,

elle est donc également périodique de période 1, et on peut donc se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0;1[$. Sur cet intervalle, on a $Ent(x) = 0$, donc f n'est autre que la fonction carré. Finalement, la courbe de f est donc une répétition de morceaux de parabole :

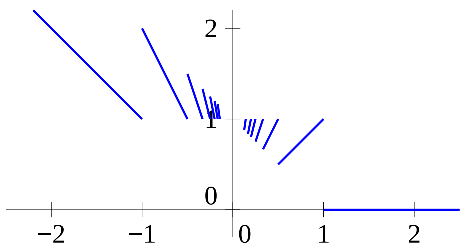


5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$, et la fonction est croissante sur $[3;+\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple par $[-3;3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{3\sqrt{9-x^2}-2x}{6\sqrt{9-x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3;0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9-x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9-x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3;\sqrt{\frac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{81}{13}};3\right]$ (pour information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty;-3]$, où la fonction est égale à $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2-9} = -2x$, soit $9(x^2-9) = 4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x = -\sqrt{\frac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{81}{5}} = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -1,12$. De même, on obtient $f\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\frac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	



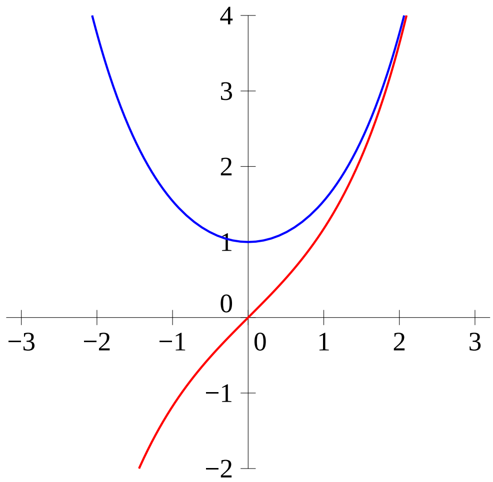
6. Ici, le plus simple est de découper $\mathcal{R}_+^*$ et $\mathcal{R}_-^*$ (la fonction n'est pas définie en 0) selon les valeurs de $Ent\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = 0$. Si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{1}{x} < 2$, donc $f(x) = x$. De même, si $x \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ etc. Visuellement, on a quand on se rapproche de 0 des segments de droite de pente de plus en plus forte mais sur une longueur de plus en plus réduite. Du côté négatif, c'est un peu similaire, mais f n'est jamais nulle : $f(x) = -x$ sur $] - \infty; -1[$, puis $f(x) = -2x$ sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right[$ etc. Difficile de tracer entièrement la courbe, mais ça ressemble à ceci :



Exercice 10 (***)

1. On a $sh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x}$, ce qui donne en prenant les logarithmes, $x = -x$, soit $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. $\mathcal{D}_{sh} = \mathcal{D}_{ch} = \mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle est définie partout) ; et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
3. Calculons $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$, donc ch est paire, et $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire. Quant à f, c'est le quotient de deux fonction impaires, elle est donc paire (on peut refaire le calcul si on veut).
4. Calculons donc : $sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$. Cette dérivée est toujours positive (c'est une somme de deux exponentielles), donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative sur $] - \infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$. Passons à la deuxième fonction : $ch'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = sh(x)$. D'après la remarque que nous venons de faire, ch est donc décroissante sur $] - \infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
5. Encore un petit calcul : $ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$, donc on a bien $ch(x) > sh(x)$.

6. La tangente à ch en -2 a pour équation $y = sh(-2)(x+2) + ch(-2) = \frac{e^{-2}-e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2}+e^2}{2} = \frac{e^{-2}-e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^2 \simeq -3,65x - 3,55$. Pour sh, on a l'équation suivante : $y = \frac{e^{-2}+e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2}-e^2}{2} = \frac{e^{-2}+e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \simeq 3,75x + 3,85$.
7. En utilisant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on obtient sans difficulté $\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} sh(x) = +\infty$.
8. Voici les deux courbes demandées :



9. C'est un calcul de dérivée de quotient tout simple, à tel point qu'il est difficile de le détailler.
10. On a $g'(x) = ch(x) - ch(x) - x\,sh(x) = -x\,sh(x)$. On a vu un peu plus haut que $sh(x)$ est toujours du même signe que x, donc $x\,sh(x)$ est toujours positif, et $g'(x)$ est toujours négatif. Autrement dit, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
11. Comme on a par ailleurs $g(0) = 0 - 0 = 0$, on peut en déduire que f', qui est du même signe que g, est positive sur $]-\infty;0[$, et négative sur $]0;+\infty[$. Si on tient absolument à compléter le tableau de variations, on peut prouver que f a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ par croissance comparée. Pour ce qui se passe en 0, c'est l'objet de la dernière question ci-dessous.
12. Oui, mais ce n'est pas si facile à calculer ! Une astuce est d'écrire que $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x-1}{2x} - \frac{e^{-x}-1}{2x}$. La première moitié a pour limite $\frac{1}{2}$ (je rappelle que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, c'est une des limites classiques vues en cours). La deuxième moitié tend aussi vers $\frac{1}{2}$ pour la même raison (il suffit de remplacer x par $-x$, qui tend tout autant vers 0), donc on a en fait $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.