Feuilles d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

15 septembre 2011

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(x+5)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (* à **)

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes, ainsi que l'équation de la tangente en 1 à leurs courbes représentatives (si elle existe) :

1. $f(x) = 1 + \ln(1+x)$
2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$
3. $f(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2\ln 2$
2. $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4$
3. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
4. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
6. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
7. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
8. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leqslant 4$
9. $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array} \right.$

Exercice 5 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 6 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$
6. $f(x) = x^{x^2}$

Exercice 7 (* à **)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3| \geqslant 5$
2. $|2x-4| = |3x+2|$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$
4. $|x+3| + |3x-1| < -2$
5. $|x-2| \geqslant |4x+2|$
6. $|2x-3| + |3-x| - |x-7| = 2$
7. $|e^x - 3| < 1$
8. $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$

Exercice 8 (**)

Écrire sans valeur absolue (en distinguant selon la valeur de x) les expressions suivantes :

1. $|x-2|+|x+5|$
2. $|3x^2-5x+2|$
3. $\ln(|x^2-4|)$
4. $|2-3x|-\sqrt{2x^2-8x+8}$
5. $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|}$

Exercice 9 (** à ***)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x)=|2x-1|-4$
2. $f(x)=Ent\left(\dfrac{x}{3}-2\right)$
3. $f(x)=|x^2-3x+2|$
4. $f(x)=(x-Ent(x))^2$
5. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}$
6. $f(x)=x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (***)

On définit deux fonctions notées ch (pour **c**osinus **h**yperbolique) et sh (pour **s**inus **h**yperbolique) de la façon suivante : $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. On note également $f(x)=\dfrac{x}{sh(x)}$.

1. Résoudre l'équations $sh(x)=0$.
2. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.
3. Déterminer la parité de chacune de ces trois fonctions.
4. À l'aide d'un calcul de dérivée, déterminer les variations de la fonction sh, puis celles de la fonction ch.
5. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $ch(x)>sh(x)$.
6. Calculer l'équation de la tangente à chacune des deux courbes en leur point d'équation $x=-2$ (garder les valeurs exactes, puis donner des valeurs approchées des coefficients directeurs, sachant que $e^2\simeq 7,4$ et $e^{-2}\simeq 0,1$).
7. Déterminer les limites de ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
8. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions sh et ch.
9. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{sh(x)-x\,ch(x)}{(sh(x))^2}$.
10. Étudier les variations de $g : x\mapsto sh(x)-x\,ch(x)$.
11. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
12. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?