Feuille d'exercices n°23 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

26 juin 2012

Exercice 1 (*)

- A n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il est bien stable par somme et par produit par un réel positif, mais pas par produit par un réel négatif ; par exemple $(2,6)\ inA$ mais $-3(2,6) = (-6,-18) \notin A$.
- B n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, il est stable par produit par un réel mais pas par somme ; par exemple $(0;2) \in B$, $(-4;0) \in B$, mais $(0,2)+(-4,0) = (-4,2) \notin B$.
- C est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: si $(x,y) \in C$ et $(x',y') \in C$, alors $x = y$ et $x' = y'$ donc $x+x' = y+y'$ et $(x,y)+(x',y') \in C$; de même, si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$ donc C est stable par produit par un réel.
- D n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il ne contient pas $(0;0)$.
- E est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

Exercice 2 (**)

Commençons par constater que la fonction nulle appartient à chacun des cinq premiers ensembles proposés, on se contentera de vérifier les deux autres conditions.

- L'ensemble des fonction paires est bien un sous-ev : si $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$ alors $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$; et $\lambda f(-x) = \lambda f(x)$.
- L'ensemble des fonctions admettant un minimum global n'est pas un sous-ev, par exemple $f(x) = x^2$ appartient à cet ensemble, mais $-2f$ n'appartient pas à l'ensemble (elle admet un maximum global).
- L'ensemble des fonction vérifiant $f(2x) = f(x^2)$ est un sous-ev (même type de calculs que pour les fonctions paires).
- L'ensemble des fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$ est un sous-ev, cela se traduit par $f'(5) = 0$, ce qui est bien stable par somme (puisque la dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées) et par produit par un réel.
- Les fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$ est également un sous-ev, encore une fois en utlisant la linéarité de la dérivation.
- Les fonctions admettant une branche parabolique de direction (Oy) ne forment pas du tout un sous-ev, la fonction nulle n'en fait pas partie (et ce n'est pas stable par somme).

Exercice 3 (**)

- Pour savoir si la première famille est libre, on cherche à annuler une combinaison linéaire de ses trois vecteurs. Si $ax+by+cz = 0$, alors on obtient le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.
  On a donc $x = -z$, ce qui en remplaçant dans les deux dernières équations donne deux fois la même équation. Autrement dit, le système n'est pas de Cramer et admet d'autres solutions que $(0,0,0)$. La famille (x,y,z) n'est donc pas libre. Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, si elle était génératrice, elle serait automatiquement

libre puisqu'il s'agirait d'une base. Comme ce n'est pas le cas, la famille ne peut donc pas être génératrice.

- Cette famille ne peut pas être génératrice, elle ne possède pas assez de vecteurs. On vérifie par contre sans difficulté qu'elle est libre (ses deux éléments ne sont pas proportionnels).
- L'étude de la liberté de la famille mène au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -2x & +y & + & 2z & = & 0 & \end{array}\right.$. La somme des deux premières équations donne $5y - 2z = 0$, $2L_1 + L_3$ donne $5y - z = 0$. La comparaiuson de ces deux nouvelles équestions donne rapidement $y = z = 0$, on en tire ensuite $x = 0$, donc la famille est libre. Comme elle est constituée de trois vecteurs en dimension 3, elle est aussi génératrice, il s'agit d'une base.
- La famille ne peut pas être libre car elle possède plus de trois éléments. On vérifie par contre que les trois premiers éléments (x, y, z) forment une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est donc génératrice, et la famille (x, y, z, w) l'est a fortiori.

Exercice 4 (*)

Comme l'espace vectoriel possède une base formée de trois vecteurs, il est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que les familles sont libres pour qu'elles forment des bases. Supposons qu'une combinaison linéaire de la famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ s'annule : $a(x_1 + x_2) + b(x_2 + x_3) + c(x_3 + x_1) = 0 \Leftrightarrow (a + c)x_1 + (a + b)x_2 + (b + c)x_3 = 0$. La famille (x_1, x_2, x_3) étant une base, on a nécessairement $a + c = a + b = b + c = 0$, ce dont on déduit rapidement que $a = b = c = 0$. La famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ est donc libre, et c'est une base de E.

C'est encore plus rapide pour $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$: $ax_1 + b(x_1 + x_2) + c(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)x_1 + (b + c)x_2 + cx_3 = 0 \Leftrightarrow a + b + c = b + c = c = 0$, donc la famille est libre et est également une base de E.

Exercice 5 (***)

1. Il suffit de constater qu'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur positive, en particulier 1 : on a alors $a + b = 0$.
2. En effet, si $x > 1$, on peut diviser l'égalité de départ par $x^2 \ln x$, qui ne s'annule pas, et on obtient $\dfrac{a}{x \ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. Regardons maintenant la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$, elle vaut d. Mais comme ce membre de gauche est constant égal à 0 par hypothèse, on doit avoir $d = 0$.
3. C'est exactement la même chose en divisant cette fois par x^2 (et en utilisant que $d = 0$). La limite vaut cette fois-ci b (on a une croissance comparée pour le dernier terme), donc $b = 0$.
4. Comme $a + b = 0$ et $b = 0$, on a donc $a = 0$. Seul c peut encore être non nul, c'est-à-dire qu'on a $cx \ln x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui ne se produit que si $c = 0$ (sinon, la fonction ne s'annule que pour $x = 1$).
5. On vient de montrer que toute combinaison linéaire nulle de la famille avait des coefficients nuls, ce qui prouve que la famille est libre. Comme elle est de plus génératrice (par hypothèse !), c'est une base de E, sui est donc de dimension 4.

Exercice 6 (***)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I, J, K, L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille.

2. Supposons $aI + bJ + cK + dL = 0$, on a donc $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ d & a & c & b \\ b & d & a & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix} = 0$, ce qui implique manifestement $a = b = c = d = 0$. La famille est donc libre.
3. La famille (I, J, K, L) est libre et génératrice, elle engendre donc un espace vectoriel de dimension 4.
4. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
5. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$
6. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI + bJ + cK + dL$ et $eI + fJ + hK + iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae+bh+cf+di)I + (af+be+ci+dh)J + (ag+bi+ce+df)K + (ai+bf+cg+de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Exercice 7 (**)

Pour la première application, on a comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$. La première équation donne $y = -x$, puis en remplaçant dans la deuxième $-3x + z = 0$, donc $z = 3x$. On a donc $Ker(u) = \{(x, -x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 3))$. Pour obtenir l'image, calculons les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $u(1, 0, 0) = (1, -2)$; $u(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 0, 1) = (0, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((1, -2); (1, 1); (0, 1))$. Mais cette famille n'est pas libre et par ailleurs engendre $\mathbb{R}^2$ tout entier (en effet, on a par exemple $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$). On a donc en fait $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

La matrice de la deuxième application est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions d'un système qui peut s'écrire sous la forme $y = -x$; $z = -x$ et $z = -y$, donc $x = -x = 0$, puis $y = z = 0$. Le noyau de u est donc réduit au vecteur nul (autrement dit, u est injective). L'image est engendrée par les trois vecteurs $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ et on vérifie facilement que cette famille est libre (le système à résoudre est le même que pour le calcul du noyau). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ (puisqu'elle comporte trois élémants), donc $Im(u) = \mathbb{R}^3$ (en fait, u est une application bijective, ce qu'on peut également prouver en constatant que sa matrice est inversible).

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est constituée des polynomes 1, X, X^2 et X^3. On a $u(1) = (1, 1, 1, 1)$; $u(X) = (1, 2, 3, 4)$; $u(X^2) = (1, 4, 9, 16)$ et enfin $u(X^3) = (1, 8, 27, 64)$, donc la matrice de u dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Mais un tel polynome, s'il n'est pas nul, se factorise par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, et doit donc être de degré au moins 4. On a donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre vecteurs calculés plus haut. Montrons que la famille est libre : si une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs s'annule, cela signifie que le polynome correspondant s'annule en 1, 2, 3 et 4, ce dont on a déjà dit que c'était impossible sauf pour le polynome nul. L'image est donc de dimension 4, donc $Im(u) = \mathbb{R}^4$.

Calculons donc les images des quatre matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, soit une matrice dans la base canonique égale à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $u(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et $a = d$, donc $Ker(u) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. L'image de u est engendrée par les images des matrices de la bvase canonique, d'où $Im(u) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 8 (*)

Le noyau de p est constitué des solutions du système homogène $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations sont proportionnelles et équivalentes à $x = -2y$, donc $Ker(p) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((-2, 1))$. L'image de p est engendrée par les images de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$, qui valent $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ces deux vecteurs étant proportionnels, on a simplement $Im(p) = Vect\left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$ (ou même $Im(p) = Vect((1, 2))$ si on veut faire plus simple). Pour calculer p^2, rien de plus simple : $p(p(x, y)) = \frac{1}{25}(x + 2y + 2(2x + 4y), 2(x + 2y) + 4(2x + 4y)) = \frac{1}{25}(5x + 10y, 10x + 20y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$, on a bien $p^2 = p$ (ce qui fait de p ce qu'on appelle en termes techniques un projecteur).

Exercice 9 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $AX = 0$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right.$. La somme $L_1 - L_2$ donne $z - 2x = 0$, la combinaison $2L_1 - L_3$ donne $2x - z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer, ses solutions doivent vérifier $z = 2x$ puis, en divisant la première ligne par 4, $4x + y - z = 0$, donc $y = z - 4x = -2x$. Finalement $Ker(u) = \{(x, -2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, 2))$.
2. Encore des systèmes à résoudre :
$$u(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & x \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & y \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 5y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$
Cette fois-ci, les lignes L_1 et L_3 sont manifestement proportionnelles. De plus, $5L_1 + 4L_2$ donne $x = 0$. Les deux premières équations se réduisent alors à $y = z$, ce qui signifie que tous les vecteur de la forme $(0, y, y)$, avec $y \neq 0$, sont vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1.
Même technique pour $u(x, y, z) = 4(x, y, z)$, on se ramène au système homogène suivant :

$$\begin{cases} 12x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 8y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 11z & = & 0 \end{cases}$$

La somme $L_2 + L_3$ donne $12x - 6z = 0$, soit $z = 2x$, et la combinaison $L_3 - 2L_1$ donne $6x - 3z = 0$, ce qui est une équation équivalente. Encore une fois, le système n'est pas de Cramer, et en remplaçant dans la première équation on obtient $12x + 4y - 8x = 0$, soit $y = -x$. Finalement, les vecteurs propres sont de la forme $(x, -x, 2x)$, avec $x \neq 0$.

3. On a trouvé trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes (en comptant le noyau calculé à la question précédente, qui correspond à la valeur propre 0). La famille formée de ces trois vecteurs sera une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u sera diagonale. Plus précisément, en posant par exemple $\mathcal{B} = ((1, -2, 2); (0, 1, 1); (1, -1, 2))$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à l'inverser. Pour changer du pivot de Gauss, résolvons le système $\begin{cases} x & + & & & z & = & a \\ -2x & + & y & - & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 2z & = & c \end{cases}$. On a donc $x = a - z$, et en faisant la somme des deux dernières équations $2y + z = b + c$, soit $2y = b + c - z$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a - 2z + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{z}{2} + 2z = c$, soit $z = 4a + b - c$; puis $x = -3a - b + c$ et $y = b + z - 2x = -2a + c$. C'est-à-dire que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (***)

Ce n'est pas si difficile si on comprend bien ce qu'il faut faire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ sera valeur propre pour l'application f si on peut trouver une suite bornée (u_n) non nulle telle que $f(u_n) = \lambda u_n$, c'est-à-dire si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, ou encore $u_{n+1} = (1 + \lambda) u_n$. De telles suites existent bien évidemment, ce sont toutes les suites géométriques de raison $1 + \lambda$. Mais pour que celles-ci (à l'exception de la suite nulle) soient bornées, il faut absolument avoir $|1 + \lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire $-1 \leqslant 1 + \lambda \leqslant 1$, ou encore $-2 \leqslant \lambda \leqslant 0$. Les valeurs propres de f sont donc tous les nombres réels compris dans l'intervalle $[0; 2]$ (une situation très différente de ce que vous étudierez l'an prochain, où les valeurs propres seront systématiquement en nombre fini.

Exercice 11 (EDHEC 2001) (***)

1. (a) Au vu de la définition de f_a, on a $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$. On calcule sans problème $A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Si $A_a X = \lambda X$, on aura $A_a^2 X = \lambda A_a X = \lambda^2 X$. Or $A_a^2 X = 0$ d'après le calcul précédent, donc $\lambda^2 = 0$ et $\lambda = 0$.

   (c) Non, avec une colonne composée de 0, elle ne peut pas être inversible.

2. (a) La famille étant constitué de 3 vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $\lambda u_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors $\lambda a e_1 + (\lambda + \mu) e_2 + (\nu - \lambda a) e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3)

étant supposée être une base, on a alors $\lambda a = \lambda + \mu = \nu - \lambda a = 0$, dont découle facilement $\lambda = \mu = \nu = 0$ (a étant supposé non nul). La famille est donc libre, et constitue une base de E.

(b) En effet, par linéarité, $f(u_1) = af(e_1) + f(e_2) - af(e_3) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = u_1$, ce qui correspond bien à la matrice donnée.

3. (a) La matrice de $g \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M \times M = M^2$, celle de f est K, si les deux applications sont égales, on doit donc avoir $M^2 = K$. On en déduit que $MK = MM^2 = M^3 = M^2M = KM$.

(b) Commençons par chercher les matrices commutant avec K : si $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$, alors $KM = \begin{pmatrix} h & i & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, l'égalité des deux matrices impose donc $e = h = i = 0$ et $b = j$, soit $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & f & g \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. On peut alors calculer $M^2 = \begin{pmatrix} b^2 & bc+cf & 2bd+cg \\ 0 & f^2 & fg+gb \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice doit être égale à K, ce qui impose $b^2 = f^2 = 0$, donc $b = f = 0$ (ce qui annule deux autres coefficients de la matrice). Il ne reste plus que la condition $cg = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $cg = 1$, ce qui correspond à la forme de l'énoncé.

4. C'est évident, si la matrice de g ressemble à ceci, son carré est égal à K, donc $g \circ g = f_a$.

Exercice 12 (ESC 2001) (***)

1. (a) La famille étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons donc que $a(1,2,1)+b(1,-1,0)+c(1,1,1) = (0,0,0)$. Cela revient à chercher les solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & & & c & = & 0 \end{array}\right.$. La différence des deux équations extrêmes donne immédiatement $b = 0$, et on a ensuite $a + c = 2a + c = 0$, dont on déduit que $a = c = 0$, donc la famille est libre, et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculons donc : $f(v_1) = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(v_1) = v_1$. De même, on obtient $f(v_2) = (0,0,0)$ et $f(v_3) = (-4,-4,-4) = -4v_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (qui est constituée de vecteurs propres pour f est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(c) La matrice P étant la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, $P^{-1}AP$ représente la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice calculée à la question précédente, qui coïncide bien avec D.

(d) Plutôt que de calculer P^{-1} et finir par un produit matriciel, considérons g l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique. On a $g(1,2,1) = (0,0,0)$; $g(1,-1,0) = (4,-4,0) = 4(1,-1,0)$ et $g(1,1,1) = (-4,-4,-4) = -4(1,1,1)$. Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont donc également vecteurs propres pour g, et la matrice de g dans cette base (qui est égale à $P^{-1}BP$, est donc diagonale (de coefficients diagonaux 0, 4 et -4).

2. (a) Constatons qu'en multipliant à gauche par P, $Y_n = P^{-1}X_n \Leftrightarrow PY_n = X_n$. Il suffit maintenant de vérifier que $P\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0$, et de même que $P\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = X_1$, ce qui est vrai.

   (b) En effet, $Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n = DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Le système s'obtient simplement en reprenant les expressions obtenues pour D et Δ. On déduit de la première relation que la suite (u_n) est constante à partir du rang 1, donc $\forall n \geqslant 1$, $u_n = -3$; la suite des termes pairs de (v_n), mais également celle des termes impairs, est géométrique de raison 4. Comme $v_0 = 0$, on aura toujours $v_{2n} = 0$; par contre, $v_{2n+1} = 4^n v_1 = -4^n$. Enfin, la suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$, donc $w_n = (\alpha + \beta n) \times (-2)^n$. La condition $w_0 = 1$ impose $\alpha = 2$, et la condition $w_1 = 1$ donne $-2(\alpha + \beta) = 4$, donc $\alpha + \beta = -2$, d'où $\beta = -4$, soit $w_n = (2 - 4n)(-2)^n$.

   (d) Il ne reste plus qu'à calculer $X_n = PY_n$. Si n est pair (non nul), on obtient $X_n = \begin{pmatrix} -4 + (2-4n)(-2)^n \\ -6 + (2-4n)(-2)^n \\ -3 + (2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$, si n est impair, $X_n = \begin{pmatrix} -3 - 4^{\frac{n-1}{2}} + (2-4n)(-2)^n \\ -6 + 4^{\frac{n-1}{2}} + (2-4n)(-2)^n \\ 3 + (2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc

   $S_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2, qui est donc de dimension 3.

3. (a) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc par linéarité $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.

   (b) Ah ben, on a déjà tout fait !

   (c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G + 12H$ et $u(H) = AHA = 4A + 6G + 9H$, la matrice recherchée est exactement la matrice M introduite un peu plus loin dans l'énoncé.

Partie II

1. Pour prouver que -4 est valeur propre, il s'agit de résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = -4X$, c'est-à-dire $\begin{cases} & & 4z & = & -4x \\ & 4y & + \ 6z & = & -4y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & -4z \end{cases}$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\frac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. Le réel -4 est donc bien valeur propre de v, avec pour vecteurs propres les vecteurs de la forme $\left(-z, -\frac{3}{4}z, z\right)$, avec $z \neq 0$.

   De même, le système $\begin{cases} & & 4z & = & x \\ & 4y & + \ 6z & = & y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & z \end{cases}$ donne $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc 1 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(4z, -2z, z)$, pour $z \neq 0$.

   Enfin, le système $\begin{cases} & & 4z & = & 16x \\ & 4y & + \ 6z & = & 16y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & 16z \end{cases}$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc 16 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(x, 2x, 4x)$, $x \neq 0$.

   La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $((4, 3, -4); (4, -2, 1); (1, 2, 4))$.

2. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans sa base de vecteurs propres, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux -4, 1 et 16. Autrement dit, $P^{-1}MP = D$.

3. En effet, c'est vrai...

4. Commençons par tout développer dans l'égalité précédente : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$. En multipliant l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a $PD^3P^{-1} = 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64I$. Or, $M = PDP^{-1}$, $M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et $M^3 = M^2 \times M = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, d'où l'égalité demandée.

5. C'est évident puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).