Feuille d'exercices n°23 : Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

21 juin 2012

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x,y) \mid x \leqslant y\}$; $B = \{(x,y) \mid xy = 0\}$; $C = \{(x,y) \mid x = y\}$; $D = \{(x,y) \mid x+y = 1\}$; $E = \{(x,y) \mid 2x - 6y = 0\}$.

Exercice 2 (**)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Exercice 3 (**)

Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, déterminer lesquelles sont libres, et lesquelles sont génératrices.

- $x = (2,1,3)$; $y = (0,-1,-1)$ et $z = (2,-1,1)$
- $x = (1,1,1)$ et $y = (2,0,-2)$
- $x = (1,-1,-2)$; $y = (2,3,1)$ et $z = (-1,-1,2)$
- $x = (1,0,2)$; $y = (-1,3,-1)$; $z = (2,1,1)$ et $w = (3,2,-1)$.

Exercice 4 (*)

On se place dans un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (x_1, x_2, x_3). La famille $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ est-elle une base de E ? Et la famille $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$?

Exercice 5 (***)

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x \ln x$ et $e_4(x) = x^2 \ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ax + bx^2 + cx\ln x + dx^2 \ln x = 0$. Montrer que $a + b = 0$.
2. Etablir que $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x \ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.
3. Etablir ensuite que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln x}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
4. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.
5. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre, puis que c'est une base de E.

Exercice 6 (***)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
3. Donner la dimension de E.
4. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
5. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
6. Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Exercice 7 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + y, y - 2x + z)$$
$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x + z, y + z)$$
$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$$
$$u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad M \mapsto AM - MA$$

où on a posé $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (*)

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $p(x, y) = \dfrac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$. Déterminer le noyau et l'image de p et montrer que $p^2 = p$.

Exercice 9 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $Ker(u)$.
2. Montrer que 1 et 4 sont des valeurs propres de u, et déterminer les vecteurs propres correspondants.
3. En déduire que u est diagonalisable, et préciser une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base définie à la question précédente. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Exercice 10 (***)

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées et f l'endomorphisme de E qui, à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer les valeurs propres de f (et les vecteurs propres correspondants).

Exercice 11 (EDHEC 2001) (***)

Soit E un espace vectoriel réel, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit a un réel non nul et f_a l'endomorphisme de E, défini par $f_a(e_2) = 0$, $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$.

1. (a) Ecrire la matrice A_a de f_a dans la base $\mathcal{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) Montrer que si $A_aX = \lambda X$, avec $X \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 0$.
   (c) A_a est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
   (b) Vérifier que la matrice de f_a dans la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.
3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.
   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.
   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.
4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2$, $u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3.

On note désormais : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. On note v l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de v et déterminer, pour chacune de celles-ci, les vecteurs propres associés. En déduire une base dans laquelle la matrice de v est diagonale.
2. Déterminer la matrice de passage P entre la base cacnonique et la base construite à la question précédente. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u est l'application définie dans la première partie.