Feuille d'exercices n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

3 novembre 2011

Exercice 1 (*)

- Commençons par constater que $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$, donc $B = [-5; 5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4; 7] \cup [-5; 5] = [-5; 7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A, donc $A \cap C = \{4; 5; 6; 7\}$.
- Un exemple élémentaire de complémentare, on fait attention au sens des crochets : $\mathbb{R} \backslash B = \mathbb{R} \backslash [-5; 5] =]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C, c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4; 5[\cup]5; 6[\cup]6; 7[$
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est contitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, ce qu'on peut noter $(A \cup B) \cap C = [\![0; 7]\!]$.
- $A \cup (B \cap C) = [4; 7] \cup \{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty; -5[\cup]7; +\infty[\cup \{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 2 (*)

L'ensemble le plus général est évidemment Q, dans lequel sont inclus tous les autres. Ensuite, l'ensemble A des quadrilatères ayant un angle droit inclut l'ensemble R des rectangles, qui lui-même inclut C (qui est donc aussi inclus dans A). D'un autre côté, l'ensemble T des trapèzes inclut celuit P des parallélogrammes, qui lui-même inclut les losanges L (un losange est un parallélogramme ayant tous ses côtés de même longueur), qui enfin inclut les carrés C (qui sont des losanges à angles droits). On peut également signaler que les rectangles sont des paralléglogrammes, c'est-à-dire que $R \cup P$. Par contre, aucune relation d'inclusion entre P ou T et A, ni entre L et R (il existe des losanges non rectangles, et vice-versa.

On peut affirmer que $A \cap L = C$ (un losange avec un angle droit est nécessairement un carré), $A \cap P = R$ et $L \cap R = C$.

Exercice 3 (***)

1. Un petit dessin permet de se convaincre que les deux expressions correspondent effectivement au même ensemble. Pour une démonstration rigoureuse, le plus simple est de procéder par double inclusion. Considérons donc un élément x appartenant à $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. On a donc deux possibilités : soit $x \in A$ et $x \notin B$; soit $x \in B$ et $x \notin A$. Dans les deux cas, x appartient à l'un des deux ensembles A ou B, donc $x \in A \cup B$. mais on sait aussi que x n'appartient pas à l'un des deux ensembles, donc il ne peut pas appartenir à leur intersection. Autrement dit, $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, et on a prouvé que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subset (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Faisons maintenant le raisonnement en sens inverse, en considérant un élément $y \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Comme $y \in A \cup B$, on a soit $y \in A$, soit $y \in B$. Dans le permier cas, y ne peut pas appartenir

à B car il n'est pas dans $A \cap B$, donc $y \in A \backslash B$. De même, dans le deuxième cas, $y \in B \backslash A$. Dans tous les cas, $y \in (1 \backslash B) \cup (B \backslash A)$, ce qui prouve la deuxième inclusion. On a donc bien $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Autre méthode, purement calculatoire, en utilisant le fait que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
On a donc $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$. Or, $A \cup \overline{A} = \overline{B} \cup B = E$, on peut enlever ces deux ensembles de notre intersection ; et via les lois de Morgan, $\overline{B} \cup \overline{A} = \overline{B \cap A}$. Finalement, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

2. Essayons donc d'écrire, à défaut de plus simplement, plus élémentairement, le membre de gauche : $(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A \Delta B})$ (en utilisant la définition et en écrivant des intersections avec les complémentaires plutôt que des différences d'ensembles). On peut développer tout ça pour obtenir $(((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}})) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}))$. Dans le développement de la toute dernière parenthèse, on peut enlever le $\overline{A} \cap A$ et le $B \cap \overline{B}$ pour obtenir enfin ceci : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$. Vous allez me dire, s'il faut recommencer un même calcul pour le membre de droite de l'égalité qu'on essaye de prouver, on est pas encore sortis de l'auberge. En fait, inutile, le membre de droite peut aussi s'écrire $(B \Delta C) \Delta A$ (la commutativité est évidente au vu de la défintion), c'est-à-dire que par rapport au calcul que nous venons de faire, on remplace A par B, B par C et C par A. Faites-le dans l'expression obtenue à la fin, vous verrez qu'elle reste identique, seul l'ordre des quatre ensembles de la réunion étant changé. Ouf, l'égalité est donc vraie !
3. Faisons un simple calcul ensembliste : $A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. Or, $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \backslash (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \backslash (A \cap B)) = (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B}) = (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$. on a utilisé les lois de Morgan pour la dernière égalité. On peut maintenant oublier dans chaque parenthèse le $\overline{A}$, puisque son intersection avec $A \cap B$ ou $A \cap C$ sera de toute façon vide. Il reste alors $A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$, ce qui est bien la même chose que ce qu'on avait obtenu plus haut. L'égalité est donc vérifiée.
4. Prenons la deuxième expression de la différence symétrique : si $A \Delta B = \emptyset$, alors $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \emptyset$. cela ne peut se produire que si $A \cup B = A \cap B$ (il faut enlever tout le monde pour ne plus rien avoir au final). Or, quel que soit l'ensemble B, on a toujours $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$. il faut donc avoir simultanément $A \cap B = A = A \cup B$ pour que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient égaux. Dire que $A \cup B = A$ signifie qu'on n'ajoute personne en faisant l'union avec B, autrement dit que $B \subset A$. Au contraire, dire que $A = A \cap B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent aussi à B (puisqu'ils sont dans $A \cap B$), donc que $A \subset B$. Conclusion, on a nécessairement $A \subset B$ et $B \subset A = A$. Le seule ensemble vérifiant $A \Delta B = \emptyset$ est donc l'ensemble A lui-même.
5. Même méthode : on a $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = E$, donc on doit avoir $A \cup B = E$ (sinon on n'obtiendra pas tout le monde en enlevant les éléments de $A \cap B$) et $A \cap B = \emptyset$. Autrement dit, A et B sont disjoints et ont pour union l'ensemble E, ce n'est possible que si $B = \overline{A}$.
6. On doit avoir cette fois-ci $A \Delta B = X$, A et X étant fixés, c'est-à-dire $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = X$. En particulier, $A \cup B$ doit inclure X, c'est-à-dire que $X \subset A \cup B$, ou encore $X \backslash A \subset B$ (tous les éléments qui sont dans X et ne sont pas dans A doivent nécessairement appartenir à B pour être dans $A \cup B$). De même, on aura $A \backslash X \subset B$. En utilisant les deux dernières inclusions obtenues, on a donc $A \Delta X \subset B$. Prenons désormais un élément dans B. S'il appartient aussi à A, alors il appartient à $A \cap B$, donc pas à X. Au contraire, s'il n'appartient pas à A, il appartient à $A \cup B$ (puisqu'il est dans B), mais pas à $A \cap B$, donc il est dans X. Autrement dit, il appartient soit à $A \backslash X$, soit à $X \backslash A$, et dans tous les cas à $A \Delta X$ qui est l'union de ces deux ensembles. Conclusion, $B \subset A \Delta X$, ce qui combiné au résultat obtenu précédemment, nous donne nécessairement $B = A \Delta X$. On vérifie facilement que cet ensemble B convient effectivement.

Exercice 4 (**)

- L'application f_1 est injective puisque, si n et p sont deux entiers naturels, $n+5 = p+5 \Rightarrow n = p$ (ce serait d'ailleurs tout aussi vrai avec des réels quelconques), mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1 (si l'application était définie sur $\mathbb{R}$ ou même sur $\mathbb{R}$, 0 aurait évidemment pour antécédent -5, mais en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, elle n'est pas surjective).
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = p^2 \Rightarrow n = p$ quand n et p sont positifs (si vous préférez, on peut dire qua l'application carré est injective sur $\mathbb{R}_+$, donc a fortiori sur $\mathbb{N}$. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2 (il aurait deux antécédents dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais ces nombres ne sont pas vraiment entiers).
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont facilement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche. En fait, on peut faire plus rapide en prouvant que f_3 est bijective et que sa réciproque est f_3 elle-même (on parle alors d'application **involutive**). En effet, si n est pair, $f_3(n) = n+1$ est un nombre impair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n+1) = n+1-1 = n$. De même, si n est impair, $n-1$ est pair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n-1) = n-1+1 = n$. Dans tous les cas, $f_3(f_3(n)) = n$, ce qui signifie bien que $f_3^{-1} = f_3$ (et au passage que f_3 est bijective).
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4, qui sont $3p$, $3p+1$ et $3p+2$).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 5 (* à **)

Si f est la fonction inverse, $f([2;4]) = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ (la fonction est décroissante sur cet intervalle) ; $f(]0;2]) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ (la fonction est également décroissante sur cet intervalle, et a pour limite $+\infty$ en 0^+, ce qui signifie qu'elle va prendre toutes les valeurs, aussi grandes soient-elles, quand on se rapproche de 0) et $f([-1;5]) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right[$ (là, le plus simple est de séparer $[-1;5]$ en deux morceaux ; les éléments de $[-1;0[$ ont des images dans $]-\infty;-1]$ et ceux de $]0;5]$ dans $\left[\frac{1}{5};+\infty\right[$).
Les images réciproques sont exactement les mêmes que les images directes, car la fonction inverse est sa propre réciproque (autrement dit, chercher l'inverse d'un nombre ou chercher un nombre dont il est l'inverse revient au même).

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, et a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-4) - 2x(2x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Je vous épargne le détail du calcul des limites, qui ne sont pas franchement insurmontables (on peut d'ailleurs invoquer la parité de la fonction g pour n'en calculer que la moitié ; du côté de $+\infty$, on utilise le quotient des termes de plus haut degré, et en 2, le numérateur est positif et le dénominateur tend vers 0 en changeant de signe). À partir du tableau, et à l'aide de quelques calculs d'images, on peut en tout cas lire $g([-1;1]) = \left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ (après avoir constaté que $g(-1) = g(1) = -1$) ; $g([-6;-3[) = \left[\frac{73}{32};\frac{19}{5}\right[$ (la fonction étant croissante sur cet intervalle, il suffit de calculer les images des extrémités) ; $g^{-1}(]-\infty;1]) =]-2;2[$ (en effet, tous les réels compris entre -2 et 2 ont bien des images inférieures à 1, alors que les réels qui ne sont pas compris dans cette intervalle ont des images supérieures à 1) et $g^{-1}([0;1]) = \emptyset$ (aucun réel n'a une image dans $[0;1]$, elles sont toutes soit supérieures à 2, soit inférieures à $-\frac{1}{4}$).

Exercice 6 (***)

1. Les antécédents de y sont les réels x vérifiant $\frac{2x}{1+x^2} = y$, soit $2x = y + yx^2$ ou encore $yx^2 - 2x + y = 0$. Si $y = 0$, on obtient comme seul antécédent $x = 0$. Sinon, on a une équation du second degré, dont le discriminant vaut $4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$. Si $y < -1$ ou $y > 1$, le discriminant est strictement négatif, donc l'équation n'a pas de solution et y n'a pas d'antécédent. Si $y = -1$, le discriminant est nul, l'équation est alors $-x^2 - 2x - 1 = 0$, soit $-(x+1)^2 = 0$, donc il y a une seule solution (donc un antécédent) qui est $x = -1$. De même, si $y = 1$, on a aussi un seul antécédent qui est $x = 1$ (l'équation étant alors $(x-1)^2$. Enfin, si $-1 < y < 1$ (avec $y \neq 0$), le discriminant est strictement positif, on a deux antécédents qui valent $\frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$.
2. L'application f n'est ni injective ni surjective (et donc pas bijective) puisque certains réels n'ont pas d'antécédent et que d'autres en ont plusieurs.
3. On a en fait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1;1]$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geq 0$, donc $x^2+2x+1 \geq 0$, ou encore $-2x \leq x^2+1$. Il suffit de diviser par x^2+1, qui est toujours positif, pour obtenir $f(x) \geq -1$. De même, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$, donc $2x \leq x^2+1$, ce qui donne $f(x) \leq 1$. De plus, sur $[-1;1]$, la fonction f est strictement croissante (sa dérivée vaut $\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, qui est toujours positive sur $[-1;1]$). Elle est donc injective, et prend toutes les valeurs entre -1 et 1, puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. On en conclut que f réalise une bijection de $[-1;1]$ sur lui-même.

Exercice 7 (**)

1. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur est toujours strictement positif), étudions donc ses variations. La dérivée du numérateur est égale au dénominateur, et vice-versa, donc $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^xe^{-x}-e^{2x}-e^{-2x}+2e^xe^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. Cette dérivée est toujours positive, et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc injective. Pour savoir si elle est surjective, il suffit de calculer ses limites à l'infini. Constatons $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Les deux termes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même, $f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, on obtient $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (alternativement, on peut utiliser le fait que la fonction f est impaire, mais ce n'est pas évident à prouver, pour déduire cette deuxième limite de la première). La

fonction f n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$. Par contre, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.

2. La fonction g est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus, le limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ (ce sont les mêmes que celles de x^3, donc la fonction prend toutes les valeurs réelles. Autrement dit, g est surjective et injective, c'est-à-dire bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h. Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Le trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, $\mathcal{D}_h = E$. Sur cet ensemble (ou presque, la fonction n'est pas dérivable en -1 ni en 2), h a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Cette dérivée est du signe de $2x-1$, donc positive si $x \geq 2$ et négative si $x \leq -1$. La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. Les images de -1 et 2 par h sont toutes les deux nulles. Quant aux limites à l'infini, elles sont toutes les deux égales à $+\infty$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine tend vers $+\infty$ des deux côtés. La fonction h est donc surjective sur $\mathbb{R}_+$ (tous les réels positifs ont bien des antécédents pas la fonction), mais pas injective pusique par exemple $g(-1) = g(2) = 0$. En fait, tout réel positif a exactement deux antécédents par h, un dans l'intervalle $]-\infty;-1]$ et un autre dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
4. La fonction i est bien définie sur l'ensemble E, elle y est dérivable et sa dérivée vaut $\dfrac{3(x-1)-(3x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$. Cette dérivée est négative partout où elle existe, la fonction i est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$. On ne peut bien sûr PAS en déduire que i est injective sur E car celui-ci est constitué de deux intervalle disjoints. Calculons donc les limites de i. Du côté des infinis, on prend le quotient des termes de plus haut degré, ce qui donne pour limite 3 à chaque fois. En 1, le numérateur tend vers 5, et le dénominateur vers 0, en étant positif à droite et négatif à gauche de 1. Autrement dit, $\lim\limits_{x\to 1^-} i(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} i(x) = +\infty$. Résumons tout ceci dans un beau tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

On peut constater que la fonction est injective puisqu'elle ne reprend jamais sur $]1;+\infty[$ une valeur déjà prise sur $]-\infty;1[$ (et qu'elle est injective sur chaque intervalle puisque strictement décroissante). Elle est également surjective sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, puisque tous les réels de l'intervalle $]-\infty;3[$ ont un antécédent dans $]-\infty;1[$, et tous les réels de l'intervalle $]3;+\infty[$ ont un antécédent dans $]1;+\infty[$. Conclusion, la fonction i réalise une bijection de E vers F.

Exercice 8 (****)

Supposons donc dans un premier temps que f est injective, et essayons de prouver qu'elle est surjective. Pour cela, prenons un élément $y \in E$ et essayons de lui trouver un antécédent. On sait par hypothèse que $f(f(f(y))) = f(y)$. Les deux éléments $f(f(y))$ et y ont donc la même image par f, ce qui implique, l'application étant injective, qu'ils sont égaux, c'est-à-dire que $^f(f(y)) = y$. On vient de trouver un élément qui est un antécédent de y par f : c'est $f(y)$! En effet, $f(f(y)) = y$. L'application f est donc surjective.

Supposons désormais que l'application f est surjective, et essayons de prouver qu'elle est injective. pour cela, considérons deux éléments x et x' dans E qui ont la même image par f. Comme f est surjective, ces deux éléments ont des antécédents, que nous nommerons z et z', par f. on a donc $f(f(z)) = f(x) = f(x') = f(f(z'))$. De même, z et z' ont des antécédents w et w' par f, qui vérifieront cette fois-ci $f(f(f(w))) = f(f(f(w')))$. mais, d'après l'énoncé, $f(f(f(w))) = f(w)$ et $f(f(f(w'))) = f(w')$. On en déduit donc que $f(w) = f(w')$, c'est-à-dire que $z = z'$. Mais alors on a certainement $f(z) = f(z')$, soit $x = x'$. On a bien prouvé l'injectivité de l'application.

Dans le cas où f est bijective, on peut composer la relation initiale par f^{-1} pour obtenir $f^{-1} \circ f \circ f \circ f = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f \circ f = id_E$. Cela signifie que f est alors sa propre réciproque (ce qui découle aussi du calcul effectué dans la première partie de la démonstration, où l'antécédent trouvé pour y n'est autre que son image par f).

Exercice 9 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geq 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\frac{n}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow n = p$, et $-\frac{n+1}{2} = -\frac{p+1}{2} \Rightarrow n = p$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geq 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p - 1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0; 0)$, puis $f(1) = (0; 1)$ et $f(2) = (1; 0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0; 2)$, $f(4) = (1; 1)$ et $f(5) = (2; 0)$ etc. Le couple $(p; q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p + q$, il est même le $(p + 1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p + q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p; q)$ pour $n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p + 1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).
4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1; 1)$ mais pas au couple $(2; 2)$, ni à $(3; 3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$

dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après le théorème compliqué cité dans l'énoncé de l'exercice.

5. Pour le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f (il n'apparait nulle part dans notre liste numérotée), qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 7 une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Il suffit de poser $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).