Feuille d'exercices n°5 : Ensembles et applications

ECE3 Lycée Carnot

20 octobre 2011

Exercice 1 (*)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 7]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 2 (* si vous n'avez pas tout oublié sur les quadrilatères)

Cet exercice vous rappelera de (bons ?) souvenirs de géométrie du collège. On note Q l'ensemble du quadrilatère du plan, A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit, P l'ensemble des parallélogrammes, T l'ensemble des trapèzes, C l'ensemble des carrées, R l'ensemble des rectangles, et L l'ensemble des losanges.

Parmi tous ces ensembles, déterminer qui est inclus dans qui, puis déterminer ce que valent les ensembles $A \cap L$, $A \cap P$ et $L \cap R$.

Exercice 3 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On appelle différénce symétrique de A et de B l'ensemble noté $A \Delta B$ et défini par $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1. Montrer qu'on a également $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
2. Montrer que la différence symétrique est associative (c'est-à-dire que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$).
3. Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
4. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A \Delta B = \emptyset$.
5. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A \Delta B = E$.
6. Plus généralement, montrer que, quel que soit le sous-ensemble X de E, il existe un unique B tel que $A \Delta B = X$ (en terme plus savant, l'application $B \mapsto A \Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même).

Exercice 4 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\dfrac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 5 (* pour la première moitié, ** pour la deuxième)

Soit f la fonction inverse. Déterminer $f([2;4])$; $f(]0;2])$; $f([-1;5])$, ainsi que les images réciproques de ces trois intervalles par f.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Déterminer son ensemble de définition et étudier rapidement g (vous avez le droit de dériver...). Déterminer $g([-1;1])$; $g([-6;-3[)$; $g^{-1}(]-\infty;1])$; $g^{-1}([0;1])$.

Exercice 6 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y et leur valeur quand il y en a.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) \in [-1;1]$. La restriction de $f : [-1;1] \to [-1;1]$ est-elle bijective ?

Exercice 7 (**)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$, $F = \mathbb{R}_+$.
4. $i(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $F = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Exercice 8 (****)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 9 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E\mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).