Feuille d'exercices n°14 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

22 mars 2011

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_1'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)x$. On peut dresser pour f_1 le tableau de variations suivant (rappelons que la limite de $x\ln(x)$ en 0 est égale à 0, c'est de la croissance comparée) :

x	0		1		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

  On peut même remarquer, une fois qu'on connait le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, que $\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = -\infty$, ce qui induit la présence d'une tangente verticale à la fonction f_1 en 0 (ou plutôt à son prolongement par continuité). Mais comme les allures des courbes n'étaient pas demandées dans cet exercice, ça ne nous sert pas à grand chose.

- La fonction f_2 est définie sur $]-\infty; 1]$, dérivable sur $]-\infty; 1[$, de dérivée $f_2'(x) = \sqrt{1-x} + x \times \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

  Comme prévu, la fonction f_2 n'est pas dérivable en 1, puisque la dérivée y a pour limite $-\infty$. il y aura donc une tangente verticale à la courbe en ce point.

- La fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $f_3(x) = e^{2x\ln(x)}$, on a $f_3'(x) = (2\ln(x) + 2)e^{2x\ln(x)}$. La fonction est prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} e^{2x\ln(x)} = e^0 = 1$, mais elle n'y est pas dérivable (on a une tangente verticale). Elle admet par ailleurs un minimum lorsque $\ln(x) + 1 = 0$, soit $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, de valeur $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f_3	1	$\searrow$	$e^{-\frac{2}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_4 est définie (et dérivable) lorsque $3x^2 + 2x > 0$, soit $x(3x+2) > 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right[\cup]0; +\infty[$, sa dérivée est égale à $f_4'(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x}$, qui est du signe de $6x+2$ sur l'ensemble de définition de f_4, autrement dit négative sur $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$ et positive sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$	0		$+\infty$
f_4	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_5'(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3 - x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, et on a par exemple $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = e^{\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f_5	0	$\nearrow$	$e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$	$\searrow$	$e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\}$, de dérivée $f_5'(x) = \frac{(2x-2)(2x+5) - 2(x^2 - 2x + 3)}{(2x+5)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 10 - 2x^2 + 4x - 6}{(2x+5)^2} = \frac{2(x^2 + 5x - 8)}{(2x+5)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 25 + 32 = 57$, il s'annule en deux valeurs qu'on n'a vraiment pas envie de préciser (et on a encore moins envie de calculer leurs images). On peut toutefois facilement se convaincre qu'elles sont placées de part et d'autre de la valeur interdite $-\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{5}{2}$			x_2		$+\infty$
f_6	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_7'(x) = (-2 - 2(1 - 2x))e^{-2x} = 4(x-1)e^{-2x}$. Elle a pour limite 0 en $+\infty$ en utilisant la croissance comparée.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_7	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0

- La fonction f_8 est définie et dérivable lorsque $\ln(x) \neq -1$, c'est-à-dire sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, de dérivée $f_8'(x) = \frac{\ln(x) + 1 - 1}{(\ln(x) + 1)^2} = \frac{\ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2}$. La fonction est par ailleurs prolongeable par continuité en 0, et y admet même une tangente horizontale puisque $f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$, qui tend vers 0 en 0.

x	0		$\frac{1}{e}$			1		$+\infty$
f_8	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_9 est définie et dérivable sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, de dérivée $f_9'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} =$

$\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$. Les plus courageux constateront que la fonction est prolongeable par continuité en -1, mais n'y est pas dérivable (elle y admet une tangente verticale), mais est aussi prolongeable par continuité en 0 car elle y a pour limite 1 (c'est l'équivalent classique de $\ln(x+1)$ en 0), et y est même dérivable car la limite de $f'(x)$ vaut $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0 (n'essayez pas de faire le calcul, ça nécessite du développement limité). Quant aux variations, on les obtient en étudiant le signe de $(x+1)\ln(x+1)-x$, qui n'est malheureusement pas évident, mais tout à fait trouvable en dérivant à nouveau ce numérateur (la dérivée donne $\ln(x+1)$, donc ledit numérateur est décroissant sur $]-1;0[$ et croissant ensuite, admettant pour minimum 0 quand $x=0$). La fonction f_9 est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.

x	-1		0		$+\infty$
f_9	0	$\nearrow$	$1 \;\|\|\; 1$	$\nearrow$	$+\infty$

- On ne peut pas vraiment utiliser de formules pour calculer cette dérivée. Constatons simplement que f_{10} n'est pas continue en n si n est un entier (relatif), donc pas dérivable non plus. Par contre, sur l'intervalle $]n;n+1[$, on a $f_{10}(x)=x\times n$, donc $f'_{10}(x)=n$. Autrement dit, la dérivée f'_{10} coïncide avec la fonction partie entière sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Faire un tableau de variations n'a pas grand sens ici.
- La fonction f_{11} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f'_{11}(x)=2x+2$ si $x<0$, et $f'_{11}(x)=2x-2$ si $x>0$. Les limites à droite et à gauche en 0 n'étant pas égales, la fonction n'y est pas dérivable (mais elle y admet deux demi-tangentes de pentes respectives 2 et -2. On peut aussi constater que la fonction est paire.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_{11}	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_{12} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_{12}(x)=e^{(4x^2-1)\ln 3}$, donc $f'_{12}=8\ln(3)xe^{(4x^2-1)\ln 3}$, ce qui ne pose guère de problème d'étude de signe. La fonction est accessoirement paire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_{12}	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_{13} est définie et dérivable sauf lorsque son dénominateur s'annule. Or, $2x^3-3x^2+x=x(2x^2-3x+1)$, le discriminant de la parenthèse vaut $\Delta=9-8=1$, elle admet deux racines $x_1=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+1}{4}=1$, donc $\mathcal{D}_{f_{13}}=\mathbb{R}\backslash\{0;\dfrac{1}{2};1\}$. En notant D le dénominateur de la fonction, sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'_{13}(x) &= \frac{(3x^2+4x-1)(2x^3-3x^2+x)-(6x^2-6x+1)(x^3+2x^2-x+3)}{D^2} \\ &= \frac{6x^5-x^4-11x^3+7x^2-x-6x^5-6x^4+17x^3-26x^2+19x-3}{D^2} \\ &= \frac{-7x^4+6x^3-19x^2+18x-3}{D^2} \end{aligned}$$

On peut arrêter le calcul, on ne saura évidemment pas étudier le signe de la dérivée (pour les curieux, elle s'annule deux fois, une fois entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, l'autre entre $\dfrac{1}{2}$ et 1).

- La fonction f_{14} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_{14}'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x)e^x + \dfrac{\sqrt{x}e^x}{x} + \sqrt{x}\ln(x)e^x = \dfrac{(\ln(x) + 2 + 2x\ln(x))e^x}{2\sqrt{x}}$. La fonction est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle par croissance comparée), mais n'y est pas dérivable (encore une tangente verticale). Le signe de la dérivée est le même que celui de $\ln(x)+2+2x\ln(x)$, qui a pour dérivée $\dfrac{1}{x}+2\ln(x)-1$, et pour dérivée seconde $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x-1}{x^2}$, et la dérivée admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $4 - 2\ln(2) > 0$. Conclusion : f_{14}' est strictement croissante, ayant pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, elle s'annule pour une valeur qu'on ne sait pas calculer.

x	0		α		$+\infty$
f_{14}	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_{15} est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_{15}'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}(x+1) - 2x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)\sqrt{x}}{(x+1)^2}$ (pour le calcul de dérivée, il peut être efficace d'écrire le numérateur sous la forme $2x^{\frac{3}{2}}$). La fonction est en fait dérivable en 0 (de dérivée nulle), et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (je me dispense du tableau de variations).

- La plus facile du lot : f_{16} n'est définie nulle part (le trinôme sous la racine a pour discriminant $\Delta = 9 - 20 = -11$, il est toujours négatif), il n'y a donc rien à faire !

- La fonction f_{17} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_{17}(x) = e^{(\ln x)^2}$, donc $f_{17}'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} e^{(\ln(x))^2}$.

x	0		1		$+\infty$
f_{17}	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction f_{18} est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $1 + |x| \geq 1$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée vaut $f_{18}'(x) = \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$ lorsque $x < 0$, et $f_{18}'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ lorsque $x > 0$. La fonction n'est pas dérivable en 0 mais y admet deux demi-tangentes de pentes respectives -1 et 1. La fonction est par ailleurs paire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_{18}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 (*)

- La fonction f est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2x-3$. La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0) = -3x + 1$; la tangente en 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) - 1 = -x$; celle en -2 a pour équation $y = (x-2) - 1 = x - 1$, et enfin celle en $\sqrt{3}$ a pour équation $y = (2\sqrt{3} - 3)(x - \sqrt{3}) + 4 - 3\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 3)x - 2$.
- La fonction g est définie sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$, et n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$.

Les seules tangentes existantes parmi celles demandées sont donc en 1 : $y = 1 \times (x-1)+1 = x$; et en $\sqrt{3}$: $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-1}}(x-\sqrt{3}) + \sqrt{2\sqrt{3}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-1}}x + \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2\sqrt{3}-1}}$.

- La fonction h est définie et dérivable sur $]-3;+\infty[$, de dérivée $h'(x) = \ln(x+3) + \dfrac{x}{x+3}$. La tangente en 0 a pour équation $y = \ln(3)x$; celle en 1 a pour équation $y = \left(\ln(4) + \dfrac{1}{4}\right)(x - 1) + \ln(4) = \left(\ln(4) + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}$; celle en -2 a pour équation $y = (0-2)(x+2)+0 = -2x-4$; enfin celle en $\sqrt{3}$ a pour équation $y = \left(\ln(3+\sqrt{3}) + \dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right)(x-\sqrt{3}) + \sqrt{3}\ln(3+\sqrt{3}) = \left(\ln(3+\sqrt{3}) + \dfrac{\sqrt{3}}{+\sqrt{3}}\right)x - \dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$.
- La fonction i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque x^2+1 est toujours strictement positif), de dérivée $i'(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1}\right)e^x = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}e^x$. On obtient donc en 0 une tangente d'équation $y = 2x+1$; en 1, $y = \dfrac{3e}{\sqrt{2}}(x-1)+\sqrt{2}e = \dfrac{3e}{\sqrt{2}}x - \dfrac{e}{\sqrt{2}}$; en -2, $y = \dfrac{6}{e^2\sqrt{5}}(x+2) + \dfrac{\sqrt{5}}{e^2} = \dfrac{6}{e^2\sqrt{5}} + \dfrac{17}{e^2\sqrt{5}}$; et en $\sqrt{3}$, $y = \dfrac{5e^{\sqrt{3}}}{2}(x-\sqrt{3}) + 2e^{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{2}e^{\sqrt{3}}x + \left(2 - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)e^{\sqrt{3}}$.
- Le dénominateur de j s'annulant en 0 (et nulle part ailleurs car il est croissant), la fonction j est définie et dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, de dérivée $j'(x) = \dfrac{2x(x+\ln(x+1)) - x^2(1+\frac{1}{x+1})}{(x+\ln(x+1))^2} = \dfrac{x^2 + 2x\ln(x+1) - \frac{x^2}{x+1}}{(x+\ln(x+1))^2}$. on peut évidemment calculer l'équation de la tangente en 1 : $y = \dfrac{1+2\ln 2 - \frac{1}{2}}{(1+2\ln 2)^2}(x-1) + \dfrac{1}{1+\ln 2} = \dfrac{1+4\ln 2}{2(1+\ln 2)^2}x + \dfrac{3+6\ln 2}{2(1+\ln 2)^2}$; et en $\sqrt{3}$, où l'équation est $y = \dfrac{3+2\sqrt{3}\ln(1+\sqrt{3}) - \frac{3}{1+\sqrt{3}}}{(\sqrt{3}+\ln(1+\sqrt{3}))^2}(x-\sqrt{3}) + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\ln(1+\sqrt{3})} = \dfrac{3\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})\ln(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\ln(1+\sqrt{3}))^2}x + \dfrac{3\sqrt{3}-(3+3\sqrt{3})\ln(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\ln(1+\sqrt{3}))^2}$ (simplification à l'utilité douteuse, je vous ai épargné les étapes de ce calcul pénible). En -2, la tangente ne peut évidemment pas exister, mais les courageux peuvent faire des petits calculs en 0 : en utilisant l'équivalent classique pour $\ln(1+x)$, $x+\ln(x+1) \underset{x\to 0}{=} x + x + o(x) \sim 2x$, donc $j(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} j(x) = 0$, on peut donc prolonger la fonction j par continuité en 0. On peut alors s'intéresser à ce qui se passe pour la dérivée : $j'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2+2x(x+o(x)) - (x^2+o(x^2))}{(2x+o(x))^2} \sim \dfrac{2x^2}{4x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} j'(x) = \dfrac{1}{2}$. Le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$ permet donc d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $j'(0) = \dfrac{1}{2}$. Il y a donc en 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

Exercice 3 (** à ***)

Étude de la fonction f

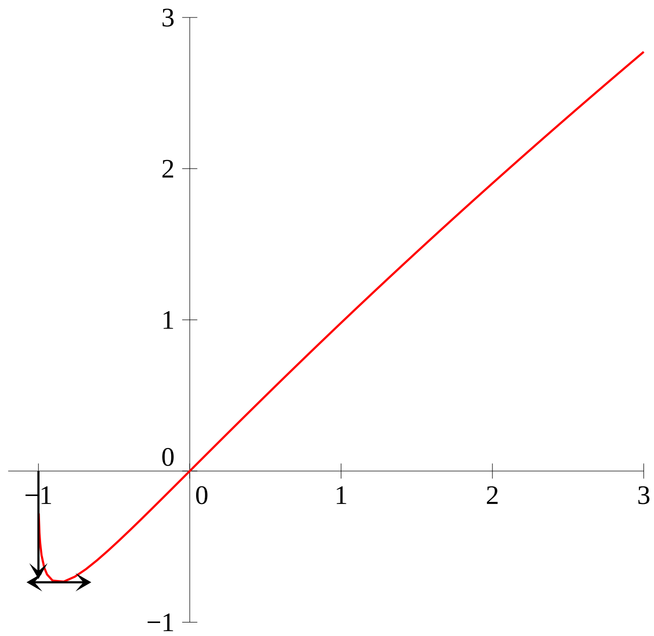
La fonction f est définie si $x+1 > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$ (par croissance comparée), $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

On a bien sûr $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}\ln(x+1)}{x} = \frac{\sqrt{X}\ln X}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln X}{\sqrt{X}}$ en posant $X = x+1$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, et la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}}$. Cette dérivée s'annule quand $\ln(x+1) = -2$, donc quand $x+1 = \frac{1}{e^2}$, soit $x = \frac{1}{e^2} - 1$. De plus, comme f' est continue sur $]-1;+\infty[$ et que que $\lim_{x\to-1} f'(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0), en appliquant le théorème du prolongement C^1, on obtient une tangente verticale à la courbe en -1. Enfin, $f\left(\frac{1}{e^2}-1\right) = \sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2} = \frac{-2}{e}$, d'où le tableau de variations suivant pour f :

x	-1		$\frac{1}{e^2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f a l'allure suivante :



Étude de la fonction g

La fonction g est définie si $x^2 - 1 \geq 0$, donc $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$.

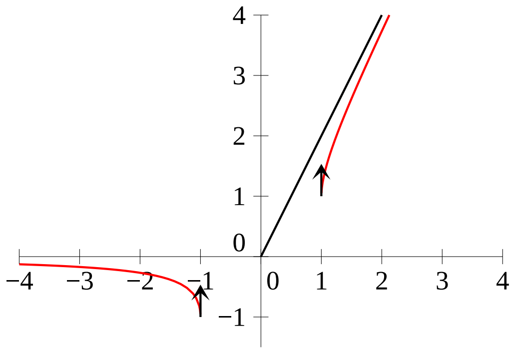
On obtient sans difficulté $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ensuite, $\frac{g(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$. Si $x \geq 1$, on a donc $\frac{g(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, dont la limite vaut 2 en $+\infty$. Il reste donc à calculer

$g(x) - 2x = x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right) = \dfrac{x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} = -\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$. Ce dernier quotient tend vers 0 en $+\infty$, il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$. C'est plus rapide en $-\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, quotient qui tend vers 0 en $-\infty$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $-\infty$.

La fonction g est a priori dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Cette dérivée est manifestement positive sur $]1; +\infty[$. De plus, on a $\forall x < -1$, $x^2 \geq x^2 - 1 \geq 0$, donc $-x \geq \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, d'où $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq -1$. On en déduit que $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$. Enfin, on constate que les limites de g' en -1 et en 1 sont respectivement égales à $-\infty$ et à $+\infty$, d'où l'existence de deux tangentes verticales en ces points via le théorème de prolongement C^1. Finalement, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe qui va avec, avec tangente et asymptote (ou plutôt demi-asymptote pour ne pas surcharger le graphique) en noir :



Étude de la fonction h

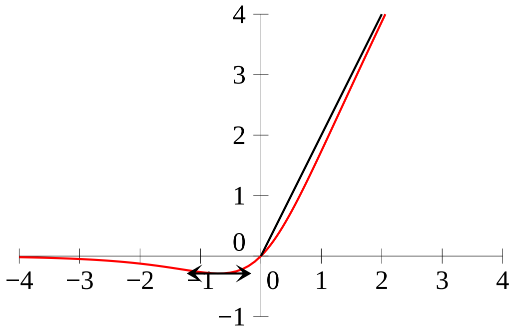
La fonction h est définie si $e^{2x} - e^x + 1 > 0$. Posons donc $P(X) = X^2 - X + 1$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est donc toujours positif. Puisque $h(x) = P(e^x)$, on en déduit que $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d'où l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. De plus, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))}{x} = \dfrac{2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2 + \dfrac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$. Le quotient tendant vers 0 (son numérateur tend déjà vers 0), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 2$. Enfin, en réutilisant le calcul précédent $h(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ tend vers 0, donc il y a en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$. Tout est positif (cf calcul du domaine de définition pour le dénominateur) sauf $2e^x - 1$ qui change de signe quand $e^x = \dfrac{1}{2}$, donc quand $x = -\ln 2$. Comme $h(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln\dfrac{3}{4}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe, bien entendu :



Étude de la fonction i

La fonction i est définie quand $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$.

Un léger accès de paresse nous pousse à ne pas déterminer le signe de toutes les limites en $-\dfrac{1}{2}$ et en 3 : bornons-nous à constater que le dénominateur tend vers 0 et le numérateur respectivement vers $\dfrac{11}{4}$ et 1, donc il y a des limites infinies en $-\dfrac{1}{2}^-$, $-\dfrac{1}{2}^+$, 3^- et 3^+. Nous obtiendrons leur signe à l'aide des variations de i. Pour les branches infinies, pour une fois c'est rapide : $i(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Ne reste plus qu'à avoir le courage de calculer la dérivée (définie sur le même ensemble que i) :

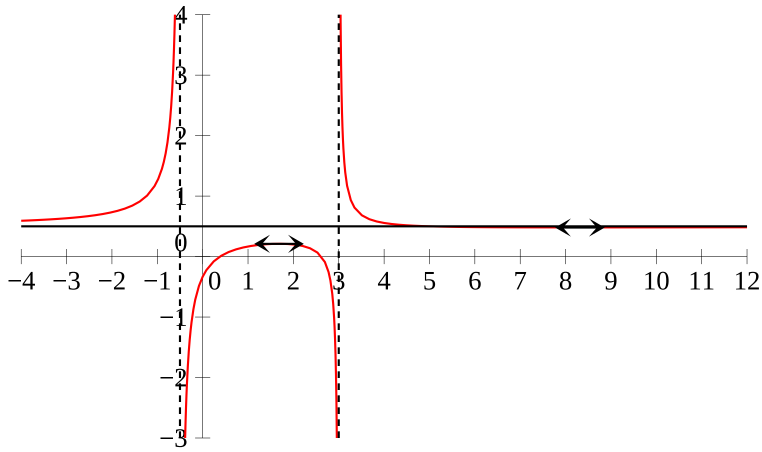
$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(2x-3)(2x^2-5x-3) - (4x-5)(x^2-3x+1)}{2x^2-5x-3)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 10x^2 - 6x - 6x^2 + 15x + 9 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 5}{(2x^2-5x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 10x + 14}{(2x^2-5x-3)^2} \end{aligned}$$

Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 100 - 56 = 44$, et admet deux racines $x_3 = \dfrac{10 - \sqrt{44}}{2} = 5 - \sqrt{11}$ et $x_4 = 5 + \sqrt{11}$. Il faut bien sûr pour achever le tableau de variations calculer les valeurs de i en

x_3 et x_4 : $i(x_3) = \dfrac{(5-\sqrt{11})^2 - 3(5-\sqrt{11}) + 1}{2(5-\sqrt{11})^2 - 5(5-\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 - 10\sqrt{11} - 15 + 3\sqrt{11} + 1}{72 - 20\sqrt{11} - 25 + 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 - 7\sqrt{11}}{44 - 15\sqrt{11}} \simeq$ 0.21 ; et de même $i(x_4) = \dfrac{(5+\sqrt{11})^2 - 3(5+\sqrt{11}) + 1}{2(5+\sqrt{11})^2 - 5(5+\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 + 10\sqrt{11} - 15 - 3\sqrt{11} + 1}{72 + 20\sqrt{11} - 25 - 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 + 7\sqrt{11}}{44 + 15\sqrt{11}} \simeq$ 0.48. Cela donc un tableau du genre :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		x_3		3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$i(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$i(x_4)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Et la courbe, bien entendu (le minimum local en x_4 est peu visible car très très proche de l'asymptote, ce dont on pouvait se douter d'ailleurs au vu de sa valeur) :



Étude de la fonction k

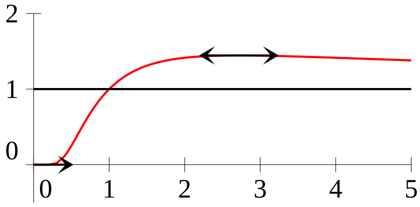
Écrivons plutôt $k(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), on a $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = 0$ et on peut prolonger k par continuité en posant $k(0) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$, d'où la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $k'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = 1$, c'est-à-dire pour $x = e$, valeur où k admet pour maximum $e^{\frac{1}{e}} \simeq 1.44$. Ne reste qu'à essayer de calculer la limite de k' en 0, ce qui n'est pas évident : $k'(x) \sim \dfrac{-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, on a par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k'(x) = 0$. En appliquant le théorème de prolongement C^1, k est dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente horizontale. Le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

Et une fois de plus, la courbe :



Étude de la fonction l

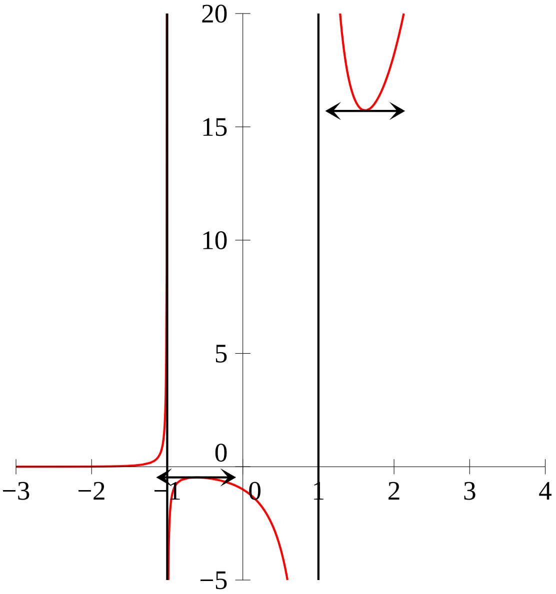
La fonction l est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

En $+\infty$, la limite de l comme celle de $\dfrac{l(x)}{x}$ sont égales à $+\infty$ par croissance comparée, il y a donc de ce côté une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, toujours par croissance comparée, l tend vers 0, l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Enfin, le numérateur de l étant toujours strictement positif, on obtient $\lim\limits_{x\to-1^-} l(x) = \lim\limits_{x\to1^+} l(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to1^-} l(x) = -\infty$.

La fonction l est dérivable sur son ensemble de définition, et $l'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$. Le trinôme au numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On calcule péniblement $l(x_1) = \dfrac{4e^{1-\sqrt{5}}}{2-2\sqrt{5}} \simeq -0.47$ et $l(x_2) = \dfrac{4e^{1+\sqrt{5}}}{2+2\sqrt{5}} \simeq 15.7$. Voila le dernier tableau da variations de l'exercice :

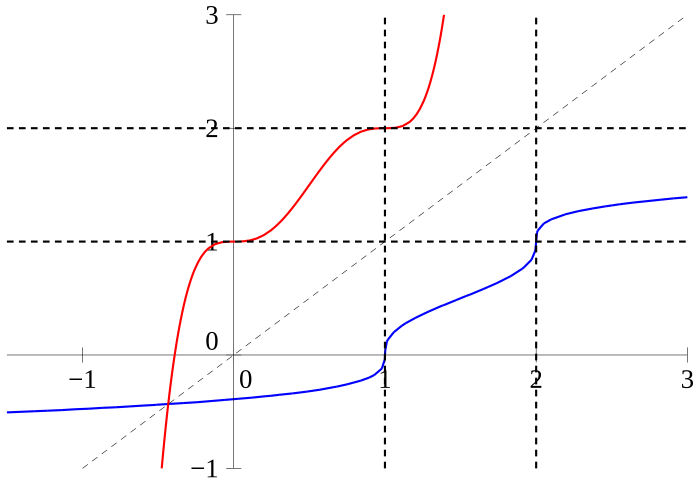
x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$l(x_1)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$l(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la dernière courbe (ouf!) :



Exercice 4 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective. Comme de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. D'après le théorème de la bijection, la fonction g a même sens de variation que f, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction g n'est pas dérivable en y si $f'(f^{-1}(y)) = 0$. Comme f' s'annule en 0 et en 1, et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$, g est dérivable partout sauf en 1 et en 2.
4. Les tangentes sont en noir épais, et l'axe de symétrie $y = x$ en moins épais, la courbe de f en rouge et celle de g en bleu :



Exercice 5 (**)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur, étant somme de deux nombres strictement positifs, ne risque pas de s'annuler. Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) =$

$\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. Cette dérivée étant positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. On peut également utiliser le fait que la fonction f est impaire pour éviter l'un des deux calculs. En tout cas, f est bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.

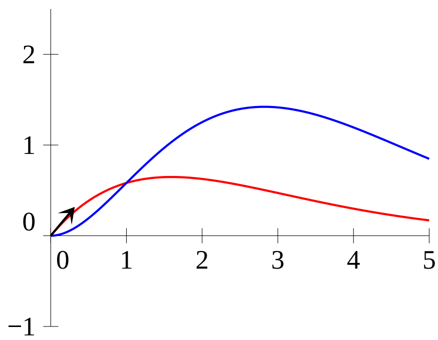
2. Via le théorème de la bigection, on peut directement affirmer que f^{-1} sera une bijection strictement croissante de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.
3. Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$, qui se ramène à $e^x = e^{-x}$, donc $x = -x$, soit $x = 0$. On en déduit que $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$. Or, $f'(0) = \dfrac{4}{(1+1)^2} = 1$, donc $(f^{-1})'(0) = 1$. La valeur de $(f^{-1})'(1)$ n'a évidemment aucun sens puisque la fonction f^{-1} n'est pas définie à cet endroit-là. Imaginons que l'énoncé nous ait plutôt demandé de calculer $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Le calcul d'antécédent se ramène à $2(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$, soit $e^x - 3e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$, on a donc $X - \dfrac{3}{X} = 0$, d'où $X^2 = 3$ et donc $X = \sqrt{3}$ (X peut difficilement être négatif), soit $x = \ln(\sqrt{3})$. Or, $f'(\ln(\sqrt{3})) = \dfrac{4}{(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 4 \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{4}$, donc $(f^{-1})\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$.
4. On peut effectuer le même calcul que précédemment. Soit $y \in]-1;1[$, $f(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$, soit $e^x(1-y) - e^{-x}(1+y) = 0$, ce qui, avec le même changement de variable qu'à la question précédente, donne $X^2 = \dfrac{1+y}{1-y}$. Notons que cette expression est bien strictement positive quand $y \in]-1;1[$, et qu'on obtient comme seule solution valide $X = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$, soit $x = \ln(X) = \dfrac{1}{2}\ln(1+y) - \dfrac{1}{2}\ln(1-y)$. On a donc $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln(1+y) - \dfrac{1}{2}\ln(1-y)$. Autant dériver imméatement cette expression pour obtenir $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-y} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-y+1+y}{(1+y)(1-y)} = \dfrac{1}{1-y^2}$. Pour les plus curieux, sachez que la fonction f^{-1} est connue par les mathématiciens sous le doux nom d'Argth (pour **Arg**ument **t**angente **h**yperbolique).

Exercice 6 (***)

1. La fonction g_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g_n'(x) = ne^x - e^x - xe^x = (n-1-x)e^x$. Cette dérivée s'annule pour $x = n-1$, et la fonction g_n est donc strictement croissante sur $[0; n-1]$ et strictement décroissante sur $[n-1; +\infty[$. Elle admet un maximum de valeur $g_n(n-1) = (n-(n-1))e^{n-1} - n = e^{n-1} - n$. De plus, $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = -\infty$.
2. Une simple lecture du tableau de variations permet de constater que g_n s'annule une fois entre $n-1$ et $+\infty$. Comme $g_n(n-1) > 0$ (g_n est strictement croissante entre 0 et $n-1$) et $g_n(n) = -n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. La fonction f_n est continue sans difficulté sur $]0; +\infty[$, et comme de plus $\dfrac{x^n}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^n}{x} \sim x^{n-1}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$, ce qui assure la continuité de f_n en 0. La fonction est donc continue sur $[0; +\infty[$.
4. Encore une fois, le seul problème se pose en 0. On a $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(e^x-1) - x^n e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x^{n-1}g_n(x)}{(e^x-1)^2}$. Comme $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{n-1}g_n(x)}{x^2} \sim x^{n-3}g_n(x)$, on en déduit facilement que, si $n \geq 3$,

$\lim_{x\to 0} f_n'(x) = 0$. Pour $n = 2$, c'est plus compliqué : on a $e^x \underset{0}{=} x+1+o(x)$ (en utilisant l'équivalent classique pour e^x-1), donc $g_2(x) = (2-x)(1+x+o(x))-2 = x-x^2+o(x)$, et $f_2'(x) \sim x^{-1}x = 1$. Finalement, en utilisant le théorème de prolongement C^1, la fonction f_n est toujours dérivable, et $f_2'(0) = 1$, ce qui donne une tangente d'équation $y = x$; $f_n'(0) = 0$ dès que $n \geq 3$ (on a alors une tangente horizontale).

5. La dérivée f_n' s'annulant quand g_n s'annule, il y a donc toujours pour f_n un maximum atteint en $x = a_n$. La limite de f_n quand x tend vers $+\infty$ vaut 0 par croissance comparée.
6. Calculons : $f_n(a_n) = \dfrac{a_n^n}{e^{a_n}-1}$. Or, comme $g_n(a_n) = 0$, $e^{a_n} = \dfrac{n}{n-a_n}$ et $e^{a_n} - 1 = \dfrac{n}{n-a_n} - 1 = \dfrac{a_n}{n-a_n}$. On en déduit que $f_n(a_n) = \dfrac{(n-a_n)a_n^n}{a_n} = (n-a_n)a_n^{n-1}$.
7. On a $f_p(x) - f_n(x) = \dfrac{x^p - x^n}{e^x - 1}$. Si $x > 1$, $x^p > x^n$ et la courbe représentative de f_p est située au-dessus de celle de f_n. Si $x < 1$, c'est le contraire. Les courbes passent toutes par le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e-1}\right)$.
8. Les deux courbes ressemblent à ceci, avec la courbe de f_2 en rouge (et sa tangente initiale en noir) et celle de f_3 en bleu (difficile de placer précisément les maxima à la main puisqu'on ne connait que très approximativement la valeur de a_n) :



Exercice 7 (** à ***)

- La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, comme $\lim_{x\to 0^-} x + \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$, on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La fonction f est donc prolongeable par contiinuité à gauche en 0 en posant $f(0) = 0$. Par ailleurs, $f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$, qui donne une belle forme indéterminée en $0-$. Mais on peut toujours écrire que $f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^x e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^-}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ (le terme e^x tendant vers 1). En posant $X = \dfrac{1}{x}$ (X tendra donc vers $-\infty$ quand x tend vers 0^-), on obtient donc $f(x) \sim -X^2e^X$ qui a pour limite 0 par croissance comparée. On en déduit que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, et d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f prolongée en 0 y est donc dérivable à gauche, avec $f_g'(0) = 0$ (demi-tangente horizontale à gauche).
- La fonction g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puisque l'expression à l'intérieur du ln est toujours strictement positive. En 0, on peut écrire $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \ln\dfrac{1}{x^2} + \ln(x^2+1) \sim \ln\dfrac{1}{x^2}$, et par croissance comparée, on en déduit que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (ceux qui ont pensé utiliser l'équivalent classique de $\ln(1+\text{truc})$ ont écrit des bêtises). On peut donc prolonger la fonction par continuité

en posant $g(0) = 0$. La dérivée de la fonction g est $g'(x) = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \frac{-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x}{x^2+1}$. Le premier terme a pour limite 0 en 0 (même argument de croissance comparée que tout à l'heure), et le deuxième tend aussi vers 0 (aucun problème pour celui-là). On a donc $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ et, en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que la fonction g prolongée en 0 y est dérivable, et que $g'(0) = 0$ (tangente horizontale en 0).

- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pas de prolongement à faire, h est définie en 0 (et $h(0) = 0$). Comme $h'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x}$ a pour limite $+\infty$ en 0 (pas de forme indéterminée, le premier terme tend simplement vers $+\infty$ et le deuxième vers 0), la fonction h n'est pas dérivable en 0, mais y admet une tangente verticale.
- La fonction i est définie sur $]-1;1[$, a priori de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$. Encore une fois, pas de prolongement, $i(-1) = i(1) = 0$. De plus, $i'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x)\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \frac{2(1-x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Le premier terme tend évidemment vers 0 en -1 et en 1, mais le deuxième tend vers 0 en 1 et vers $-\infty$ en -1. La fonction i est donc dérivable en 1, avec $f'(1) = 0$, mais pas en -1, où elle admet une tangente verticale.
- La fonction j est définie sur $]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, et de dérivée $j'(x) = \sqrt{x+x^2} + \frac{x(1+2x)}{\sqrt{x+x^2}} = \sqrt{x+x^2} + (1+2x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}$. Cette expression a une limite nulle en 0 et infinie en -1, la fonction j est donc dérivable en 0 (et $j'(0) = 0$) mais admet une tangente verticale en -1. Les plus malins auront bien sûr remarqué que les calculs étaient extrêmement similaires à ceux effectués pour la fonction i.
- La fonction k est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (le dénominateur s'annule uniquement lorsque $x = 0$). De plus, l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ permet d'obtenir que $k(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$, donc k est prolongeable par continuité en 0 en posant $k(0) = 0$. Ca tombe bien, c'est justement ce qui est fait dans l'énoncé. Calculons donc la dérivée, en écrivant pour simplifier $x\sqrt{x}$ sous la forme $x^{\frac{3}{2}}$: $k'(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{\sqrt{x}(3e^x - 3 - 2xe^x)}{2(e^x-1)^2}$. Or, $3(e^x-1) - 2xe^x = 3(x+o(x)) - 2x(1+o(1)) = x + o(x)$, donc $k'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La dérivée ayant une limite infinie en 0, la fonction y admet une tangente verticale. Les plus malins auront remarqué cette fois-ci que la fois, qui est équivalente en 0 à $\sqrt{x}$, a une dérivée équivalente à $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui devrait les pousser à se poser la question suivante : aurait-on par hasard le droit de dériver des équivalents ? La réponse est « Vous n'avez pas de théorème à ce sujet à votre programme, donc ne le faites pas ».

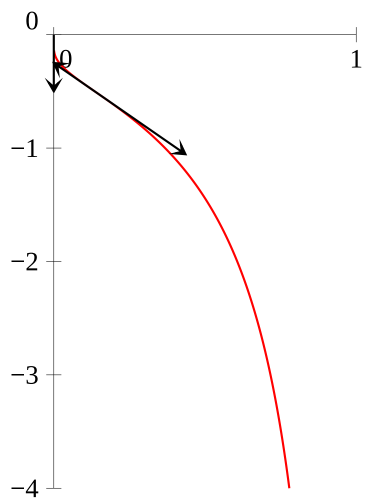
Exercice 8 (*)

1. C'est une évidence, la fonction est un produit de fonctions usuelles définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculons donc : $f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$; $f''(x) = -e^{-x} - (2-x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$; $f^{(3)}(x) = e^{-x} - (x-3)e^{-x} = (4-x)e^{-x}$. Normalement, ça devrait être suffisant pour deviner la forme générale des dérivées, qu'on peut écrire sous la forme $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$ (le $(-1)^n$ servant à prendre en compte les changements de signe.
3. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x) = (x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n(x-n-1)e^{-x} = ((-1)^{n+1}(x-n-$

$1) + (-1)^n)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x - n - 1 - 1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x - (n+1) - 1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1}. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 9 (**)

1. La fonction f est bien sûr continue et dérivable sur $]0;1[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en 0. Sa dérivée sur $]0;1[$ vaut $f'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$. Cette dérivée est continue sur $]0;1[$, et a pour limite $-\infty$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ par croissance comparée. D'après le théorème du prolongement C^1, il y aura donc une tangente verticale en 0. Notons au passage que f' est négative sur $]0;1[$, et que f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
2. Dérivons donc une deuxième fois f sur $]0;1[$: la dérivée de $x(\ln x)^2$ est $(\ln x)^2 + x \times 2\dfrac{\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$, donc $f''(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \dfrac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3}$. Sur $]0;1[$, $\ln x$ est négatif, donc $\dfrac{1}{x^2(\ln x)^3} < 0$ et f'' est de signe opposé à celui de $\ln x + 2$, qui s'annule quand $\ln x = -2$, c'est-à-dire $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$. La fonction f est donc convexe sur $]0, e^{-2}]$ et concave sur $[e^{-2}, 1[$.
3. On vient de voir que f'' s'annulait pour $x = e^{-2}$. Comme $f(e^{-2}) = \dfrac{1}{\ln(e^{-2})} = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(e^{-2}) = \dfrac{-1}{e^{-2}(-2)^2} = -\dfrac{e^2}{4}$, le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(e^{-2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, et la tangente à la courbe en ce point a pour équation $y = -\dfrac{e^2}{4}(x - e^{-2}) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{e^2}{4}x - \dfrac{1}{4}$.
4. Voici une allure de la courbe, avec la tangente calculée ci-dessus tracée en noir :



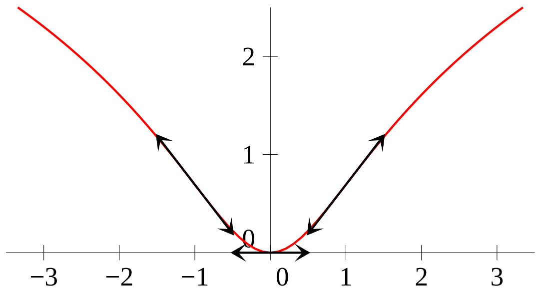
Exercice 10 (***)

Étude de la fonction f

Comme $1 + x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflection pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) = f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1;1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$. Voici une allure de la courbe (courbe en rouge, tangentes intéressantes en noir) :

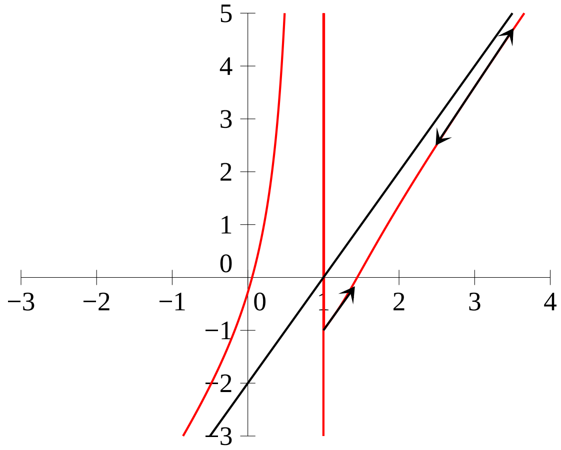


Étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires. Pour les plus pressés, signalons d'ailleurs qu'on peut en $+\infty$ comme en $-\infty$ écrire $e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + o(1)$, donc $g(x) = 2x - 2 + o(1)$, ce qui règle tout de suite la question de l'asymptote.
Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité à droite » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.
Enfin, $g''(x) = \left(\dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur $]-\infty;-1[$ et sur $[3;+\infty[$ et concave sur $[1;3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x = 1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :



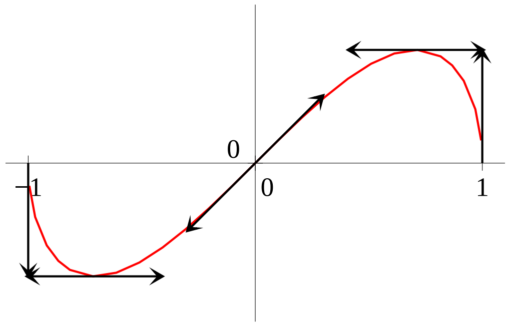
Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ par théorèmes généraux. De plus, la fonction est impaire.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à remarquer que $h(-1) = h(1) = 0$.

On a $h'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x^2)-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Il y a donc deux extrema pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $h\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Constatons au passage que les limites de h' en -1 et en 1 sont infinies puisque le numérateur de h' tend vers -2 et le dénominateur vers 0, il y a donc des tangentes verticales en -1 et en 1. De plus, $h''(x) = \dfrac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-4x(1-x^2)+x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde ne s'annule que pour $x = 0$ (car h n'est définie que sur $[-1;1]$, intervalle où $2x^2-3$ est toujours négatif), point d'inflexion pour lequel on a $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, et on obtient le tableau de variations complet suivant :

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$h''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
h	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
h	convexe					concave			



Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie sur $]0;+\infty[$, et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x=0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)=0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x)=\dfrac{2-(2\ln x+3)}{x^2}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=(2\times(-\frac{1}{2})+3)\sqrt{e}=2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x)=\dfrac{-2x-2x(-1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x=1$, et $i(1)=3$; $i'(1)=-1$. La fonction i est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :