Feuille d'exercices n°14 : dérivation, convexité

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2012

Exercice 1 (*)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant si besoin sur quels intervalles la fonction est dérivable). Si vous êtes courageux, vous pouvez enchainer sur un tableau de variations des fonctions dans les cas où le signe de la dérivée est facile à étudier (pour certaines, vous n'y arriverez pas).

- $f_1(x) = x\ln x - x$
- $f_2(x) = x\sqrt{1-x}$
- $f_3(x) = x^{2x}$
- $f_4(x) = \ln(3x^2+2x)$
- $f_5(x) = e^{x^3-x}$
- $f_6(x)\dfrac{x^2-2x+3}{2x+5}$
- $f_7(x) = (1-2x)e^{-2x}$
- $f_8(x) = \dfrac{x}{\ln(x)+1}$
- $f_9(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$
- $f_{10}(x) = x \times Ent(x)$
- $f_{11}(x) = x^2 - 2|x|$
- $f_{12}(x) = 3^{4x^2-1}$
- $f_{13}(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x+3}{2x^3-3x^2+x}$
- $f_{14}(x) = \sqrt{x}\ln(x)e^x$
- $f_{15}(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{x+1}$
- $f_{16}(x) = \sqrt{3x-5-x^2}$
- $f_{17}(x) = x^{\ln(x)}$
- $f_{18}(x) = \ln(1+|x|)$

Exercice 2 (*)

Calculer (quand elles existent) les équations des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 - 3x + 1$
- $g(x) = \sqrt{2x-1}$
- $h(x) = x\ln(x+3)$
- $i(x) = \sqrt{x^2+1}e^x$
- $j(x) = \dfrac{x^2}{x+\ln(x+1)}$

Exercice 3 (** à ***)

Faire une étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, limites et éventuels prolongements par continuité, asymptotes et branches infinies, dérivée et étude des variations, et enfin une allure de la courbe) :

1. $f(x) = \sqrt{x+1}\ln(x+1)$
2. $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$
3. $h(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
4. $i(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-5x-3}$
5. $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$
6. $l(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 4 (*)

Soit $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note g la réciproque de f. Quel est le sens de variations de g ?
3. Quel est le domaine de dérivabilité de g ?
4. Représenter dans un même repère les courbes représentatives de f et de g, en indiquant les tangentes horizontales et verticales.

Exercice 5 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
2. En déduire l'existence, le domaine de définition et le tableau de variations de la fonction f^{-1}, réciproque de f.
3. Déterminer l'unique antécédent de 0 par f, en déduire la valeur de $(f^{-1})'(0)$. Déterminer de même $(f^{-1})'(1)$.
4. Calculer plus généralement, pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, une expression simple de $f^{-1}(x)$ et de $(f^{-1})'(x)$.

Exercice 6 (***)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions $g_n : x \mapsto (n-x)e^x - n$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x > 0$, prolongée par $f_n(x) = 0$.

1. Étudier les variations de g_n.
2. Prouver l'existence d'un unique réel strictement positif a_n tel que $g_n(a_n) = 0$ et montrer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. Étudier la continuité de f_n.
4. Étudier la dérivabilité de f_n et préciser, si elle existe, l'équation de sa tangente en 0.

5. Étudier les variations de f_n (cela devrait faire intervenir les résultats de la question 2).
6. Montrer que $f_n(a_n) = (n - a_n)a_n^{n-1}$.
7. Étudier la position relative des courbes représentatives de f_n et f_p lorsque $p > n$.
8. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f_2 et f_3 (en choisissant une échelle adaptée).

Exercice 7 (** à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème.

- $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $g(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $h(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $i(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$
- $j(x) = x\sqrt{x + x^2}$
- $k(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$ prolongée par $j(0) = 0$

Exercice 8 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

1. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer les premières dérivées de f et essayer de conjecturer la forme de $f^{(n)}$.
3. Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 9 (**)

Soit f la fonction définie sur $[0; 1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0; 1[$ (0 compris).
2. Déterminer la convexité de f sur $[0; 1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 10 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexité et la présence éventuelle de points d'inflexion (on finira bien évidemment l'étude par la tracé de courbes précises).

- $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$