Feuille d'exercices n°7 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

2 décembre 2011

Exercice 1 (*)

1. L'élève a successivement quatre possibilités pour choisir son entrée, trois pour choisir le plat, puis cinq pour choisir le dessert, soit un total de $4 \times 3 \times 5 = 60$ menus possibles. Ces choix se multiplient car ils constituent des choix successifs pour la constitution d'un seul et unique menu. On peut représenter les choses sous la forme d'un arbre, dans lequel chaque choix représente un nouvel embranchement, et où on cherche à compter le nombre total de branches.
2. Cet autre élèves doit choisit deux entrées (supposées distinctes) parmi les quatre proposées, puis un plat, ce qui fait $\binom{4}{2} \times 3 = 6 \times 3 = 18$ menus possibles.
3. Nos deux gourmets choisissent deux entrées parmi quatre, deux plats parmi trois et deux desserts parmi cinq, soit au total $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ possibilités.

Exercice 2 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$, le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les positions des deux boules blanches sur les quatre tirages ; l'ordre dans lequel on a tiré ces deux boules blanches est déjà pris en compte dans le calcul des listes, c'est-à-dire ici dans le facteur 8^2).

Exercice 3 (**)

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.

- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 4 (*)

Tout cet exercice est plus facilement résolu à coups de patates, mais on peut aussi faire les choses formellement en utilisant les petites formules du cours :

1. On a assez simplement $|A\backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C)\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $|A\backslash(B \cup C)| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 5 (** à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ tirages (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$ tirages.
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 6 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).
2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse 2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout

entier), pour $k=1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k=6$, c'est-à-dire $A=E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.

3. Au total, il y a $\binom{6}{0}\times 2^0+\binom{6}{1}\times 2^1+\cdots+\binom{6}{6}\times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}2^k = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2+1)^6=3^6=729$.
4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A\cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A\cup B=E$).

Exercice 7 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\dfrac{10!}{4!\times 4!}=6\ 300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\dfrac{11!}{5!\times 2!\times 2!}=83\ 160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 8 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :
- s'il n'y a pas d'ex æquo, $4!=24$ classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
- s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4}\times 2=8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4}\times 3!=36$ classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2}=6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5=x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$; $(2x+3y)^3=8x^3+36xy^2+54xy^2+27y^3$ et $(x-1)^7=x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$.

Exercice 10 (***)

La première est une application directe du binôme : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=(1-1)^n=0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k=0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n\times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) : $2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Problème

Cas particulier

1. Il faut choisir les quatre cases noires dans un ensemble de 24 cases, il y a donc $\binom{24}{4}$ grilles possibles.
2. Il y a quatre possibilités pour le coin, et il reste ensuite à noircir trois cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit $4 \times \binom{20}{3}$ possibilités.
3. Il suffit de choisir, dans chaque colonne, quelle case (parmi six possibles) va être noircie, soit 6^4 choix possibles.
4. Comptons les grilles n'ayant pas de case noire sur la première ligne : il y en a $\binom{18}{6}$ (il ne reste que 18 cases sur les trois dernières lignes). Par passage au complémentaire, il y a donc $\binom{24}{4} - \binom{18}{4}$ grilles avec au moins une case noire sur la première ligne.
5. Il faut choisir les quatre lignes (parmi six possibles) et à l'intérieur de chaque ligne, la case à noircir sur quatre disponibles, soit $\binom{6}{4} \times 4^4$ possibilités.
6. C'est le même principe que la question précédente, sauf qu'on a 4 choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, mais plus que 3 sur la deuxième ligne, 2 sur la troisième ligne et un seul sur la dernière. Le nombre de grilles cherché est donc $\binom{6}{4} \times 4! = 360$.

Cas général

1. On a désormais k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ possibilités (naturellement, on doit avoir $k \geq 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-2}{k-2}$ possibilités.

4. Cela suppose que $k \leq n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case noire parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
   - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
   - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
   - 2 et 1 pour les deux dernières.

   Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.
7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !