Feuille d'exercices n°7 : Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

24 novembre 2011

Exercice 1 (*)

Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. Normalement, un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Sous ces conditions, combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Un élève au régime ne mange pas de dessert mais a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées. Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment gouter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite. Combien ont-ils de menus possibles ?

Exercice 2 (**)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- Au moins une boule blanche a été tirée.
- Une boule noire au plus a été tirée.
- Trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre.
- Deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées.

Exercice 3 (**)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- Au moins un atout est un multiple de cinq ?
- Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 4 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour au moins un parmi trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 5 (** à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 6 (***)

Soit E un ensemble fini comportant 6 éléments. On cherche à déterminer le nombre de couples de parties (A, B) de E vérifiant $A \cup B = E$ (par exemple, si $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A = \{1;2;3;5\}$ et $B = \{2;4;5;6\}$ constituent un couple possible).

1. Rappeler quel est le nombre de parties de E ayant 2 élements. Si on fixe une telle partie A, combien peut-on trouver de parties B vérifiant $A \cup B = E$?
2. Faire le même raisonnement pour les parties à 0, 1, 3, 4, 5 et 6 éléments de E.
3. En déduire la solution du problème posé.
4. Généraliser au cas où l'ensemble fini E possède n éléments (donner le résultat sous forme d'une somme puis la calculer à l'aide du binôme de Newton).

Exercice 7 (*)

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.

Exercice 8 (**)

De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 9 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 10 (***)

Donner une expression simple des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, il est fortement conseillé de partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque).

Exercice 11 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p+q+2 \leq n$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$.

Problème

Pour répondre aux dernières questions de ce problème (et plus généralement pour vous donner une idée des résultats obtenus dans les exercices de dénombrement), une calculatrice est indispensable. Vos calculatrices ont certainement toutes, cachées dans un obcur menu (souvent celui de probas), des commandes pour calculer les factorielles, et même directement des arrangements ou des coefficients binômiaux.

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre sont noircies (et les autres blanches). Dans un premier temps, on s'intéresse à des grilles à 6×4 cases (6 lignes et 4 colonnes donc, et 24 cases au total), contenant exactement 4 cases noires.

1. Combien y a-t-il de telles grilles différentes ?
2. Combien ont exactement un coin noirci ?
3. Combien ont exactement une case noircie sur chaque colonne ?
4. Combien ont au moins une case noire sur la première ligne ?
5. Combien ont leurs quatre cases noires sur quatre lignes différentes ?
6. Combien ont leurs cases noires sur quatre lignes et quatre colonnes différentes (donner la valeur numérique) ?

On se place maintenant dans le cas général : n lignes, p colonnes et k cases noires, avec $k \leq np$.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).