Feuilles d'exercices n°21 : Couples de variables aléatoires

ECE3 Lycée Carnot

1^er juin 2012

Exercice 1 (*)

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple (U, V). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (**)

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (**)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules elles-mêmes numérotées de 1 à k. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables X et Y.

Exercice 4 (***)

On considère deux variables aléatoires X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $P((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer la loi de U.

Exercice 5 (***)

Une urne contient $n + 1$ boules numérotées 0 à n. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire X_k est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.

2. Montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.
5. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p premiers tirages. Exprimer Z_p en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et la limite de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Trois urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_1, X_2 et X_3 les trois numéros obtenus. On note X le plus grand des numéros obtenus, Z le plus petit, et Y celui du milieu. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z) (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de X, de Y et de Z. On pourra commencer pour cet exercice par traiter le cas où $n = 3$.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.

1. (a) Donner la loi du couple (X, Y).
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{2; 3; \dots; n+1\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{n+1; \dots; 2n\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que
$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
.
3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\{1; 2; \dots; n\})$.
   (b) On admet que T est indépendante de X et de Y. Déterminer la probabilité
$$P(X + Y + Z = n + 1)$$
.

Exercice 8 (**)

On réalise une suite de lancers avec une pièce équilibrée, et on note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Déterminer, pour tout entier $j \geq 2$, la loi de X conditionnelle à $Y = j$.
5. Déterminer, pour tout entier $i \geq 1$, la loi de $Y - n$ conditionnelle à $X = n$. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice 9 (***)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. Calculez l'espérance de la variable U.
3. Déterminer $E(V)$ de deux façons différentes (un calcul direct, et un autre utilisant la valeur de $E(U)$).

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier : $\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = k)\,\mathrm{P}(X_2 = n + k)$
   (b) En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer : $E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. (a) En déduire : $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k)$
   (b) Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.