Feuilles d'exercices n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 septembre 2011

Exercice 1 (*)

- $A = (3x+1)^4 = ((3x+1)^2)^2 = (9x^2+6x+1)^2 = 81x^4+36x^2+1+108x^3+18x^2+12x = 81x^4+108x^3+54x^2+12x+1$
- $B = 2x^2-12x+18 = 2(x^2-6x+9) = 2(x-3)^2$
- $C = 4x^2-16 = (2x+4)(2x-4) = 4(x+2)(x-2)$
- $D = (2x-6)(x+2)-(x+1)(x-3)+2x(3-x) = (x-3)(2(x+2)-(x+1)-2x) = (x-3)(-x+3) = -(x-3)^2$
- $E = (2x+1)^3+(2x+1)^2+2x+1 = (2x+1)((2x+1)^2+2x+1+1) = (2x+1)(4x^2+6x+3)$

Exercice 2 (**)

1. $A = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
2. $B = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}+10\sqrt{3}-15$ (ne peut pas se simplifier davantage).
3. $C = \dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3\times 3^2}}{2\sqrt{2\times 3^4}} = \dfrac{2\times 3^2\times\sqrt{2}}{2\times 3^2\sqrt{2}} = 1$
4. $D = \dfrac{2^5\times 25\times 3^{-4}\times 36}{3^8\times 15\times 100} = \dfrac{2^5\times 5^2\times 3^{-4}\times 2^2\times 3^2}{3^8\times 3\times 5\times 2^2\times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11}\times 5}$
5. $E = \dfrac{24}{36}-\dfrac{15}{36}+\dfrac{4}{36}-\dfrac{30}{36} = -\dfrac{17}{36}$

Exercice 3 (* à ***)

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25-4\times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2;3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1=0$. On peut donc factoriser par $x-1$: $(2x^3-4x^2+3x-1) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification, on obtient $a=2$, $b=-2$ et $c=1$, donc $2x^3-4x^2+3x-1 = (x-1)(2x^2-2x+1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X+2$, soit $X^2-X-2=0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1-4\times(-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. $x^3+5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2+5x-6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25+4\times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^3+5x^2-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} =]-\infty; -6] \cup [0; 1[$

5. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines -2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1-\sqrt{2}; 2[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$

Exercice 4 (***)

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x - 3y + 1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y - 3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy - 3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5 < z - 2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).
- On peut bien sûr encadrer $x^2 - 4x + 4$ terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z - 4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2 - z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \dfrac{3}{e}$.

Exercice 5 (**)

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).

- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 6 (** à ***)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0; 1[$, par exemple $x = 0.5$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, x^2 : VRAI, il existe deux tels réels, $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 3n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 3, et le résultat sera toujours un entier naturel.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$: FAUX, si x est strictement négatif, il n'est supérieur à aucun carré.
7. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples (cette proposition était en fait la négation de la précédente).
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x > y^2$: FAUX, on a par exemple toujours $x < (x+1)^2$
9. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI, il suffit de prendre par exemple $y = \frac{x}{2}$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists z \in \mathbb{R}$, $e^y = xz^2$: VRAI, ça parait un peu alambiqué, mais il suffit en fait de prendre $x = 1$, et, quelle que soit la valeur de y, de poser $z = \sqrt{e^y}$.

Exercice 7 (*)

C'est très facile si on a compris qu'une négation transformait un quantificateur universel en quantificateur existentiel et vice-versa.

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \neq 12$
3. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n \neq 2p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 3n$
5. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) \neq 2p$
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y^2$
9. $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $y \geqslant x$
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $e^y \neq xz^2$

Exercice 8 (**)

Barnabé et Clothaire disant le contraire l'un de l'autre, l'un d'eux dit nécessairement la vérité. Comme deux des trois accusés mentent, un seul a dit la vérité, et d'après ce qui précède ce n'est pas Aristide. Autrement dit, Aristide ment, et c'est donc lui le voleur (vous pouvez vérifier la cohérence de l'ensemble).