

FICHE MÉTHODE SUR LES ESPACES VECTORIELS

ECE3 Lycée Carnot

10 juillet 2012

Cette fiche-méthode n'est **PAS** un résumé du cours. Elle consiste en une liste de petits conseils permettant de repérer plus facilement les méthodes utiles dans des situations classiques, et d'éviter de tomber dans des pièges tout aussi classiques. Elle doit être complétée par une connaissance précise et rigoureuses des énoncés du cours.

CONSEILS

- Systèmes, systèmes et encore systèmes, c'est l'outil de base dans les espaces vectoriels. Montrer qu'une famille est libre, c'est résoudre un système avec des 0 à droite. Montrer qu'une famille est génératrice, c'est résoudre le même système avec des a, b, c etc. à droite.
- Quand on travaille dans les espaces vectoriels, on écrit tout en colonne, par exemple quand on écrit une matrice d'application linéaire ou une matrice de passage.
- Faites bien attention à la dimension des espaces classiques suivants : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour dimension n^2 ; $\mathbb{R}_n[X]$ a pour dimension $n + 1$. Ainsi, si on veut donner la matrice d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cette matrice aura quatre lignes et quatre colonnes.
- N'essayez jamais de déterminer l'Image d'une application linéaire en revenant à la définition, chercher plutôt à déterminer les images des vecteurs d'une base.

LES PETITS TRUCS EN PLUS

- On est rarement obligé de revenir à la définition pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on peut souvent le voir comme noyau d'une application linéaire, ce qui permet de s'éviter quelques vérification laborieuses.
- Si vous repérez dans une famille de vecteurs, appelons-les par exemple u, v et w , une relation du genre $w = 3u + v$, vous pouvez être certain, sans faire de calcul supplémentaire, que la famille n'est pas libre.
- Pour diagonaliser une matrice, il suffit en fait de trouver autant de vecteurs propres que la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Peu importe comment vous avez trouvé ces vecteurs propres, il est facile de vérifier qu'un vecteur donné est vecteur propre. Ainsi, si l'énoncé a la gentillesse de vous fournir, sous une forme ou une autre, les vecteurs propres, vous pourrez parfois contourner les difficultés dans les questions de diagonalisation.