Essec II 1998 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 juin 2012

Partie II

1. La condition $D = n$ impose donc que la premier client passe n instants à être servi au guichet. À chacun de ces n instants, il y a une probabilité p qu'un nouveau client arrive, et N_1 compte le nombre total de nouveaux clients. On reconnait là un cas typique de loi binomiale de paramètre (n, p). On en déduit que $\forall k \in \{0; 1; \dots; n\}$, $P_{D=n}(N_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (naturellement, si $k > n$, la probabilité conditionnelle est nulle).
   Les évènements $D = n$ formant un système complet d'évènements pour $n \in \mathbb{N}$ (puisque D suit une loi de Poisson, il est en effet autorisé que le client ne passe même pas un instant au guichet), on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(N_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{D=n}(N_1 = k) \times P(D = n)$. On peut en fait commencer la somme à $n = k$ (avant, les probabilités conditionnelles sont nulles) et remplacer par les lois binomiale et de Poisson : $P(N_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^{n+k}}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$. On reconnait une série exponentielle, pour obtenir $P(N_1 = k) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}$. On vient de prouver que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda p)$. En particulier, on aura $E(N_1) = \lambda p$.
2. (a) L'évènement $N_k = 0$ signifie qu'aucun nouveau client n'est apparu lors de la k-ème vague, autrement dit que la file d'attente s'est vidée après le passage de la vague précédente. Faire l'union de ces évènements revient donc à dire qu'il existe un entier pour lequel la file sera vide à l'issue de la k-ème vague, ce qui est bien équivalent à voir la file se vider en un temps fini. La suite est clairement croissante, puisque si $N_k = 0$, la k-ème restera un temps nul au guichet, ce qui ne laisse pas la possibilité pour de nouveaux clients d'arriver lors de la $(k+1)$-ème vague, et implique donc $N_{k+1} = 0$. Par le thèorème de la limite monotone, on a donc $L = \lim_{n \to +\infty} P(N_k = 0)$.

   (b) Si $N_1 = 1$, on se retrouve avec une première vague constituée d'un unique client, tout comme pour la vague numérotée 0. La loi de N_2 sera donc la même que celle de N_1 en l'absence de conditionnement, celle de N_3 la même que celle de N_2 en l'absence de conditionnement etc. On a donc en particulier $P_{N_1=1}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)$. Assez similairement, si $N_1 = j$, N_2 sera constituée de la réunion des clients apparus pendant le service du premier client de la vague 1 (une sorte de première sous-vague), ceux apparus pendant le service du deuxième client (deuxième sous-vague), etc jusqu'au j-eme client (j-ème sous-vague), et on peut ainsi découper toutes les vagues ultérieures en j morceaux. La k-ème vague sera vide si chacune de ses j sous-vagues est vide, ce qui se produit avec une probabilité $P(N_k = 0)$ d'après le raisonnement précédent (on s'est ramené au cas où il n'y a qu'un client dans N_1). Toutes les sous-vagues étant indépendantes (puisque les variables B_i le sont), on a bien $P_{N_1=j}(N_{k+1}=0)=P(N_k=0)^j$. Cette formule est d'ailleurs valable également pour $j=1$ et même $j=0$ (si $N_1=0$, l'évènement $N_{k+1}=0$ est certain).

(c) Appliquons donc pour changer la formule des probabilités totales au système complet formé des évènements $N_1=j$: $p_{k+1}=P(N_{k+1}=0)=\sum_{j=0}^{+\infty} P_{N_1=j}(N_{k+1}=0)\times P(N_1=j)=\sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}=e^{-\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(p\lambda p_k)^j}{j!}=e^{-\lambda p}e^{p\lambda p_k}=e^{\lambda p(p_k-1)}$. Par ailleurs, on a bien sûr $p_0=0$, puisque la vague numérotée 0 est toujours constituée d'un client. On reconnait dans la suite (p_k) une suite récurrente identique à celles étudiées dans la première partie, pour $a=\lambda p$. En reprenant les résultats démontrés dans cette partie, on voit donc que la file d'attente se vide presque sûrement en temps fini lorsque $\lambda p \leqslant 1$. Si $\lambda p>1$, on aura par contre une probabilité non nulle que la file ne s'arrête jamais, et cette probabilité tendra même vers 1 quand λp tend vers $+\infty$.

(d) Lorsque $p=\frac{1}{2}$, la file d'attente s'achèvera presque sûrement en temps fini si la durée de service moyenne est de 1 (on a alors $\lambda p=\frac{1}{2}$) ou 2 instants ($\lambda p=1$), mais la probabilité tombe à 0.20 si le temps de service est de quatre instants, et à 0.02 pour 8 instants. Si $p=\frac{1}{4}$, on aura une fin presque sûre avec un temps de service de 1, 2 ou 4 instants, mais une probabilité de $0,20$ que la file s'achève un jour si ce temps de service est de 8 instants.

3. (a) Si $i=0$, la variable N_k sera identiquement nulle. Si $i\geqslant 1$, en découpant N_k en sous-vagues comme à la question 2.b, N_k sera la somme de i variables indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre λp, ce qui donne $N_k\sim\mathcal{P}(i\lambda p)$. En particulier, $E_{N_k=i}(N_{k+1})=i\lambda p$.

(b) Par définition, $E(N_k)=\sum_{i=0}^{+\infty} iP(N_k=j)=\frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty} i\lambda pP(N_k=j)$. Il ne reste plus qu'à remplacer ce $i\lambda p$ par $E_{N_k=i}(N_{k+1})$ pour obtenir la formule souhaitée.
On peut désormais remplacer l'espérance conditionnelle par sa définition (sous réserve d'existence) pour obtenir $E(N_k)=\frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty}P(N_k=i)\sum_{j=0}^{+\infty}jP_{N_k=i}(N_{k+1}=j)$
$=\frac{1}{\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}jP(N_k=i)P_{N_k=i}(N_{k+1}=j)$ en inversant les sommes comme suggéré. On reconnait désormais, au facteur constant j près, la formule des probabilités totales dans la deuxième somme, donc $E(N_k)=\frac{1}{\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}jP(N_{k+1}=j)=\frac{E(X_{n+1})}{\lambda p}$. Autrement dit, $E(N_{k+1})=\lambda pE(N_k)$ (ce qui prouve au passage que $E(N_{k+1})$ existe également).

(c) On vient de voir que, si N_k admettait une espérance, alors N_{k+1} également. Comme N_0 (qui est constante égale à 1) admet certainement une récurrence, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que N_k en admettra une pour tout entier k. De plus, la suite $(E(N_k))$ est géométrique de raison λp et de premier terme 1, donc $E(N_k)=(\lambda p)^k$.

(d) Ce nombre de total de clients est simplement donné par la somme des variables N_0, N_1, ..., jusqu'à N_n. Par linéarité de l'espérance, le nombre moyens de clients servis jusqu'à la n-ème vague vaut donc $\sum_{k=0}^{k=n}(\lambda p)^k=\frac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p}$ si $\lambda p\neq 1$. Si $\lambda p=1$, il vaut simplement $n+1$.

(e) Lorsque $\lambda p > 1$, la limite est infinie, ce qui est cohérent puisqu'on a une probabilité non nulle que la file d'attente ne s'arrête jamais, donc qu'on ait une infinité de clients à servir. Si $\lambda p = 1$, la file s'arrête presque sûrement, mais le nombre moyen de clients servis est tout de même infini, un cas fort intéressant. Enfin, si $\lambda p < 1$, sans surprise, le nombre moyen de clients servis au total (qui correspond à la limite) est fini, égale à $\dfrac{1}{1-\lambda p}$. Ainsi, si $\lambda p = \dfrac{1}{2}$ (par exemple une proba $\dfrac{1}{2}$ d'apparition de nouveau client à chaque instant, et un temps moyen de service d'un instant), le nombre moyen de clients servis vaut 2 (pas énorme !). Si $p = \dfrac{1}{4}$ (avec toujours un temps de service d'un instant), on descend à $\dfrac{4}{3}$ de clients servis en moyenne. Il faut vraiment que λp soit proche de 1 pour avoir des résultats plus intéressants. Par exemple, avec $p = \dfrac{1}{10}$ (une chance sur 10 qu'un nouveau client apparaisse à chaque instant) et une durée de service moyenne de 9 instants, on servira en moyenne 10 clients avant que la file ne se vide.