Sujet de révision Essec 2008 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 juin 2012

A. Modélisation du problème

1. Les évènements A_n, B_n et C_n sont manifestement incompatibles (sauf si une des deux personnes a le don d'uniquité), et P_1 et P_2 ne peuvent pas se trouver à plus de deux routes de distance sur le pentagone. L'un des trois évènements A_n, B_n et C_n est donc nécessairement modifié, et ceux-ci forment un système complet d'évènements.
2. L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 se trouvent initialement en S_1 et S_2, c'est-à-dire sur des sites adjacents, $b_0 = 1$ et $a_0 = c_0 = 0$.
3. (a) Supposons donc C_n vérifié, autrement dit que P_1 et P_2 se trouvent à deux routes de distance, par exemple en S_1 et en S_3. Au déplacement suivant, P_1 peut donc se trouver en S_2 ou en S_5, et P_2 en S_2 ou en S_4. Les quatres (deux fois deux) possibilités étant équiprobables, et une seule voyant nos deux personnes aboutir au même endroit, on a bien $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$. Accessoirement, on constate que sur les trois cas restants, un seul amène nos deux compères à des sites adjacents, et deux les laissent à deux routes de distance, donc $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

   (b) Ca c'est beaucoup plus facile ! L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 arrêtent de bouger une fois qu'ils se rencontrent, A_{n+1} sera automatiquement vérifié si A_n l'est, d'où $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ (et donc bien sûr $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$).

   (c) Ne reste plus qu'à supposer B_n réalisé et à voir ce qui se passe. On a alors par exemple P_1 en S_1 et P_2 en S_2, d'où après le déplacement suivant les quatre possibilités (S_5, S_1) ; (S_5, S_3) ; (S_2, S_1) et (S_2, S_3). Dans trois cas les compères sont toujours sur des sites adjacents, dans le dernier ils se retrouvent à deux routes d'écart, donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$; $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$, et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.
4. Appliquons la formule des probabilités totales au systèmes complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) : $P_{A_{n+1}} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(A_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n + \frac{1}{4}c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire en exploitant les calculs de probabilités conditionnelles précédents.
5. (a) En décalant la deuxième relation de la question précédente, puis en exploitant la troisième, on obtient $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n$. Mais, en reprenant une fois de plus la deuxième relation et en la « retournant » un peu, on a $\frac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n$, donc en reportant $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} - \frac{3}{8}b_n = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$.

   (b) La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16} = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$, et ses deux racines sont, sans grande surprise, $\dfrac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \alpha$ et $\dfrac{5 + \sqrt{5}}{8} = \beta$.

On peut donc écrire $b_n = w\alpha^n + z\beta^n$, avec $b_0 = 1$, et $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{3}{4}$, donc $w+z=1$, ou encore $z = 1-w$; et $w\alpha + z\beta = \frac{3}{4}$, soit $w\alpha + (1-w)\beta = \frac{3}{4}$, donc $w(\alpha-\beta) = \frac{3}{4} - \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{8}$. Comme $\alpha - \beta = \frac{-2\sqrt{5}}{8} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$, on a donc $w = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$; puis $z = 1 - w = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$. Finalement, $b_n = \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$.

(c) En reprenant (et en multipliant par 4) la deuxième relation de la question 4, on obtient $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = \frac{4}{5}(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) - \frac{3}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) = \frac{\alpha^n}{5}(4\alpha^2-3\alpha) + \frac{\beta^n}{5}(4\beta^2-3\beta)$. Or, en reprenant l'équation caractéristique de (b_n), on a $4\alpha^2 - 3\alpha = 2\alpha - \frac{5}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = -\sqrt{5}$; de même $4\beta^2 - 3\beta = 2\beta - \frac{5}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = \sqrt{5}$. Finalement, la relation devient donc $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$ comme annoncé dans l'énoncé.

6. (a) En revenant à la toute première question du sujet, la complétude du système d'évènements permet d'affirmer que $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$, qu'on peut tenter de simplifier ou non selon son courage (la formule exacte n'a ici que peu d'intérêt, on s'en dispensera donc).

(b) Hormis le 1 initial, (a_n) est une somme de suites géométriques de raison α ou β. Or, $2 < \sqrt{5} < 3$, donc $2 < 5 - \sqrt{5} < 5 + \sqrt{5} < 8$, ce qui suffit à constater que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(c) Notons D l'évènement « Les deux personnes ne se rencontrent jamais ». On a donc $\bar{D} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cette union est formée d'une suite croissante d'évènements (cf question 3.b), donc par théorème de la limite monotone a pour probabilité $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$. Par passage au complémentaire, on peut dire que $P(D) = 0$, autrement dit qu'il est quasi-sûr que les personnes finiront par se rencontrer.

B. Nombre de déplacements avant rencontre

1. La variable X prend bien sûr ses valeurs dans $\mathbb{N}$, mais ne peut pas être égale à 0, ni à 1 (car $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$, donc $P(A_1) = 0$. On a en fait $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$.
2. L'évènement X_n est réalisé si A_n est réalisé mais pas A_{n-1}, donc si $A_n \cap B_{n-1}$ ou $A_n \cap C_{n-1}$ sont réalisés. Le premier cas étant impossible, $P(X_n) = P(A_n \cap C_{n-1}) = P(C_{n-1}) \times P_{C_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{4}c_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. L'espérance de X existe car $nP(X = n)$ est une somme de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes. Calculons-la donc :
$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + 1\right) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$.
Or, $\frac{1}{(1-\beta)^2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}}$; et $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14+6\sqrt{5}}$. D'où $\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}} - \frac{64}{14+6\sqrt{5}} = \frac{64(14+6\sqrt{5}-14+6\sqrt{5})}{196 - 36\times 5} = \frac{64 \times 12\sqrt{5}}{16} = 48\sqrt{5}$. Encore un petit effort et on en voit le bout : $E(X) = \frac{\sqrt{5}}{20} \times 48\sqrt{5} = 12$. Il faudra donc en moyenne 12 déplacements (chacun) pour que P_1 et P_2 se rejoignent.

4. Tentons de calculer $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}\beta}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\beta^{n-2} - \frac{\sqrt{5}\alpha}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\right)$. On simplifie ? Allez, soyons fous : $\frac{\beta}{(1-\beta)^3} = \beta \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \frac{512\beta}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})(72+32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} = \frac{64(520+232\sqrt{5})}{5\ 184 - 5\ 120} = 520+232\sqrt{5}$; de même $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^3} = \alpha \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \frac{512\alpha}{72+32\sqrt{5}} = \frac{64(5-\sqrt{5})(72-32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} = 520-232\sqrt{5}$. Tout compte fait, ce n'est pas si immonde que ça : $E(X(X-1)) = \frac{\sqrt{5}}{10} \times 464\sqrt{5} = 232$. On en déduit via König-Huygens que $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 232 + 12 - 12^2 = 244 - 144 = 100$, soit $\sigma(X) = 10$ (qui eût cru à un résultat si simple il y a quelques lignes ? Hein, je suis sûr que vous avez douté, soyez francs un peu !).