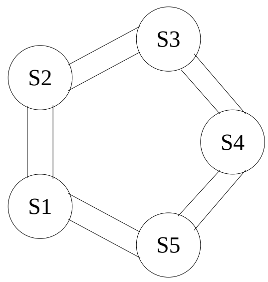
Sujet de révisions : Essec 2008

ECE3 Lycée Carnot

5 juin 2012

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

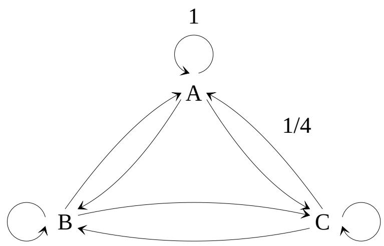
A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel n, on définit les trois évènements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'évènements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Justifier $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.
   (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma suivant :



4. Etablir les relations suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{array}\right.$
5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   On fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β.
   On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Soit $n \in X(\Omega)$, montrer : $P(X = n) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.