Sujet Best of Ecricome : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

19 juin 2012

Exercice 1 (Ecricome 2007)

I. Etude des variations de la fonction f_a.

1. On peut écrire $f_a(t) = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{a^2}{2t}$, avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a^2}{2t} = 0$. Cela permet de prouver d'une part que $\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$, et d'autre part que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}t$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f_a. Comme de plus $\dfrac{a^2}{2t} > 0$ puisqu'on a supposé t positif, la courbe est située au-dessus de la droite.
2. Sans difficulté, $\lim\limits_{t\to 0} f_a(t) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale en 0.
3. Calculons : $f_a'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a^2}{2t^2} = \dfrac{t^2 - a^2}{2t^2}$. On en déduit le tableau suivant, en calculant $f(a) = \dfrac{1}{2}(a + a) = a$:

t	0		a		$+\infty$
f_a	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

4. Ben oui, c'est vrai, il suffit de lire le tableau ci-dessus.

II. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Comme $f(a) = a$, la suite sera constante. Si on tient à le prouver très rigoureusement, on procède par récurrence : $u_0 = a$ par hypothèse, et si on suppose $u_n = a$, alors $u_{n+1} = f(a) = a$.
2. Si $t > a$, on a $0 < t^2 - a^2 < t^2$, dont on peut déduire en divisant par $2t^2$ qui est strictement positif que $0 < f_a'(t) < \dfrac{1}{2}$.
3. C'est une conséquence immédiate de la dernière question de la première partie : si $n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant a$ (récurrence totalement inutile ici).
4. La première inégalité est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis, appliquée sur l'intervalle $[a; +\infty[$. On a prouvé que u_n appartenait à cet intervalle, f' y est encadrée entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, et a est un point fixe de la fonction f_a, donc $0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - a)$. La deuxième inégalité se prouve par récurrence. Au rang 1, l'inégalité stipule que $|u_1 - a| \leqslant |u_1 - a|$, ce qui est certainement vrai. Et en supposant l'inégalité vérifiée au rang n, on aura en appliquant successivement l'inégalité précédente et l'hypothèse de récurrence $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$.

5. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$, c'est-à-dire que $\underset{n\to+\infty}{u}{}_n = a$.
6. Pour avoir une suite convergeant vers $\sqrt{2}$, il suffit de prendre $a = \sqrt{2}$, donc la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

```
PROGRAM yo;
USES wincrt;
VAR u : real; i : integer;
BEGIN
u :=1;
FOR i :=1 To 100 DO
BEGIN
u :=(u+2/u)/2;
WriteLn(u);
END;
END.
```

III. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

1. On prend son souffle, et on y va, en utilisant des dérivées de produit (à chaque fois, il y a un terme qui ne dépend pas de la variable par rapport à laquelle on dérive) : $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1+y}{2}\left(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1+y}{2}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)$; de même (on peut éviter le deuxième calcul, x et y jouent un rôle symétrique dans la définition de g) $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1+x}{2}\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\right)$.
   On calcule ensuite sans difficulté $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1+y}{2} \times \frac{2}{x^3} = \frac{1+y}{x^3}$, et de même $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1+x}{y^3}$; et avec un tout petit peu plus de difficulté $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right) - \frac{1+y}{2} \times \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2y^2}$ (pareil pour l'autre dérivée seconde croisée).
2. On cherche les points critiques de la fonction, qui vérifient, en mettant les deux dérivées premières au même dénominateur et en ne gardant que le numérateur, $(1+y)(-y+x^2) = 0$ et $(1+x)(-x+y^2) = 0$. Comme x et y sont tous les deux supposés strictement positifs, il faut donc avoir $y = x^2$ et $x = y^2$, soit $x = (x^2)^2 = x^4$, ce qui n'est le cas que pour $x = 1$. Le seul point critique de la fonction est le point $(1,1)$. Comme $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = 2$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1) = -1$, on calcule $2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, donc le point critique correspond à un minimum local de la fonction g.
3. Développons la formule donnée pour g : $g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 + \right.$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x + y\right) + 1$. Or, $f_1(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, donc $1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = g(x,y)$.
4. On a vu dans la première partie que la fonction f_a avait pour minimum a, donc f_1 a pour minimum 1. On en déduit que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 1 + 1 +$

$1+1=4$. Comme le minimum local déterminé au-dessus a pour valeur $g(1,1)=\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4$, on en déduit que le minimum est un minimum global.

Exercice 2 (Ecricome 2007)

I. Diagonalisation de A.

1. On calcule $A^2=\begin{pmatrix} 3\times3-6 & -3+2 \\ 6\times3-2\times6 & -6+2\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=A$. Si λ est une valeur propre de A, on aura donc pour le vecteur propre X associé, $AX=\lambda X$, donc $A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda A^2X$, mais par ailleurs $A^2=A$, donc $A^2X=AX=\lambda X$. On a donc nécessairement $\lambda^2=\lambda$, soit $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.
2. Cherchons les vecteurs propres de la forme $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à la valeur propre 0. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 0 \\ 6x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations sont équivalentes, une solution non triviale du systèmes est par exemple le couple $(1,3)$. On cherche de même les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & x \\ 6x & - & 2y & = & y \end{array}\right.$. Là encore, les deux équations sont équivalentes, et cette fois le vecteur $(1,2)$ sera solution du système. Comme les deux solutions trouvées foement une base de $\mathbb{R}^2$, la matrice $P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base précédemment citée, soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, sera digonale, et plus précisément, égale à $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

0.1 II. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Vérifions la linéarité : $\phi_A(\lambda M+\mu N)=A(\lambda M+\mu N)-(\lambda M+\mu N)A=\lambda AM+\mu AN-\lambda MA-\mu NA=\lambda\phi_A(M)+\mu\phi_A(N)$.
2. Calculons : $\phi_A^2(M)=A(AM-MA)-(AM-MA)A=A^2M-AMA-AMA+MA^2=AM-2AMA+MA$ en utilisant que $A^2=A$; puis $\phi_A^3(M)=A(AM-2AMA+MA)-(AM-2AMA+MA)A=A^2M-2A^2MA+AMA-AMA+2AMA^2-MA^2=AM-2AMA+2AMA-MA=AM-MA=\phi_A(M)$, ce qui prouve que $\phi_A^3=\phi_A$. Le polynôme x^3-x ayant pour racines 0, 1 et -1 (il se factorise sous la forme $x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$), les seules valeurs propres possibles sont ces trois nombres.
3. Si on pose $N=P^{-1}MP$, alors $AM-MA=\lambda M\Leftrightarrow P^{-1}APP^{-1}MP-P^{-1}MPP^{-1}AP=\lambda P^{-1}MP$ (n multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite et en insérant des $P^{-1}P$ là où c'est nécessaire, ce qui donne bien $DN-ND=\lambda N$.
4. (a) On calcule $DN-ND=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle si et seulement si $b=c=0$.
   (b) Les matrices N obtenues précédemment forment un sous-espace vectoriel engendré (par exemple) par les matrices $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $M=PNP^{-1}$, il suffit de calculer P^{-1} pour obtenir les matrices M correspondantes. On va inverser P par la méthode du système : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ 3x & + & 2y & = & b \end{array}\right.$. En substituant, on a dans la deuxième équation $3(a-y)+2y=b$, soit $y=3a-b$, puis $x=a-y=b-2a$. On en déduit que $P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, puis que les vecteurs propres correspondant seront les matrices $PBP^{-1}=M_1$ (faites le calul très élémentaire pour le vérifier) et $PBP^{-1}=A$.

(c) On cherche donc les matrices associées aux valeurs propres 1 et -1. Pour 1, on veut donc résoudre $DN - ND = N$, ce qui au vu du calcul de $DN - ND$ se produit quand $a = b = d = 0$; pour -1, on obtient de même $a = c = d = 0$.

(d) Comme précédemment, le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 sera engendré par la matrice $P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; pour E_{-1}, ce sera $P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

5. En regroupant les quatre matrices propres trouvées pour les différentes valeurs propres de ϕ_A, on obtient une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (qui est bien de dimension 4) contituée de vecteurs propres, donc ϕ_A est bien diagonalisable.

Exercice 3 (Ecricome 2010)

I. Étude de parties successives.

1. Commençons par E_2, qui se produit si le deuxième dé donne le même résultat que le premier, ce qui (indépendamment du résultat donné par la premier dé) a pour probabilité $P(E_2) = \frac{1}{6}$. Ensuite, on peut constater que les événements E_1, E_2 et E_3 forment un système complet d'événements, et que E_1 et E_3 sont équiprobables par symétrie de la situation, donc $P(E_1) = P(E_3) = \frac{1}{2}(1 - P(E_2)) = \frac{5}{12}$.

2. En reprenant l'énoncé et les calculs précédents, $X_i(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(X_i = 2) = \frac{1}{6}$; $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{5}{12}$. On calcule ensuite aisément $E(X_i) = \frac{2}{6} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, puis $E(X_i^2) = \frac{4}{6} + \frac{5}{12} = \frac{13}{12}$ et, en utilisant la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{25}{48}$.

3. Puisque $Y_1 = X_1$, la réponse à cette question se situe ci-dessus.

4. Les deux variables X_1 et X_2 étant indépendantes, la loi de leur somme Y_2 s'obtient par des calculs classiques : $P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$; $P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0) = 2 \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{72}$; $P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 0) = \frac{25}{144} + 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144} + \frac{5}{36} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$; de même $P(Y_2 = 3) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$; et $P(Y_2 = 4) = \frac{1}{36}$.

5. (a) Après trois parties, on peut avoir gagné entre 0 et 6 points, donc $Y_3(\Omega) = \{0; 1; \dots; 6\}$.

   (b) Vous avez le droit d'envoyer un mail d'insultes au concepteur du sujet pour avoir osé poser une question aussi franchement stupidement calculatoire. On sera donc très content de ne justifier qu'une valeur, par exemple $P((Y_2 = 0) \cap (Y_3 = 0)) = P(Y_2 = 0) \times P(X_3 = 0) = \frac{25}{144} \times \frac{5}{12} = \frac{125}{1\ 728}$.

$Y_2 \backslash Y_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{125}{1\ 728}$	$\frac{125}{1\ 728}$	$\frac{25}{864}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{125}{864}$	$\frac{125}{864}$	$\frac{25}{432}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{25}{192}$	$\frac{25}{192}$	$\frac{5}{96}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{25}{432}$	$\frac{25}{432}$	$\frac{5}{216}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{5}{432}$	$\frac{5}{432}$	$\frac{1}{216}$

Naturellement, tous les candidats consciencieux mais démunis de calculatrices auront tout de même vérifié que la somme de toutes ces probabilités était égale à 1.

(c) Il « suffit » d'additionner les éléments du tableau précédent par colonnes, pour obtenir :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y_3 = k)$	$\frac{125}{1\,728}$	$\frac{125}{576}$	$\frac{175}{576}$	$\frac{425}{1\,728}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{1}{216}$

6. (a) On a clairement $Y_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$, donc par linéarité $E(Y_n) = \frac{3n}{4}$. Comme par ailleurs les variables sont indépendantes, la variance également sera linéaire et $V(Y_n) = \frac{25n}{48}$.

(b) La question est horriblement mal posée, l'énoncé voulait sûrement dire « combien de parties en minimum pour avoir plus de 10 points en moyenne » (oui, c'est différent de ce que demande l'énoncé, et la question posée est infaisable), auquel cas il faut juste résoudre $\frac{3n}{4} > 10$ pour constater que ce sera le cas au bout de 14 parties.

II. Etude du temps d'attente.

1. (a) On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et T_1 correspond en fait à l'attente de la première occurence de l'événement $_2 \cup E_3$, donc $T_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$. Autrement dit, $P(T_1 = k) = \frac{7}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$.

(b) Une petite question de cours : $E(T_1) = \frac{12}{7}$, et $V(T_1) = \frac{12^2}{7^2} \times \frac{5}{12} = \frac{60}{49}$.

2. (a) Comme pour T_1, on a $T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puisqu'on peut marquer deux points dès le premier essai.

(b) On a $P(T_2 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$, puis $P(T_2 = 2) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 \neq 0) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{5}{72} + \frac{35}{144} = \frac{5}{16}$.

(c) Pour obtenir $T_2 = k$, il faut obtenir pour la première fois un score total de 2 points à la k-ème, ce qui laisse deux possibilités : soit on ne marque rien lors des $k-1$ premières parties et 2 points à la k-ème, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$; soit on marque un points lors d'une des $k-1$ premières parties (et aucun lors des autres), puis un ou deux points lors de la k-ème, il faut alors choisir la partie où on a marqué un seul point, ce qui peut se faire à $k-1$ moments différents, d'où la deuxième moitié de la formule $(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$.

(d) Oui. Ah il faut justifier ? Ben pour $k = 1$, la formule donne $\frac{1}{6}$; et pour $k = 2$, elle donne $\frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$, ce qui est bien le calcul effectué plus haut. À vrai dire, on se demande bien pourquoi l'énoncé isole ces deux cas.

(e) Vérifions : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{12}\right)^{k} + \frac{35}{144}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{12}} + \frac{35}{144} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{12})^2} = \frac{2}{7} + \frac{35}{49} = 1$.

(f) Il est négligeable (sa probabilité est nulle puisqu'il est complémentaire de l'union des événements $T_2 = k$, dont la probabilité vaut 1 au vu de la question précédente).

(g) Allons-y pour un dernier calcul : $E(T_2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{35}{144}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{12})^2} + \frac{35}{144} \times \frac{2}{(1-\frac{5}{12})^3} = \frac{24}{49} + \frac{24 \times 35}{7^3} = \frac{144}{49}$.