Sujet de révision : Best Of Ecricome

ECE3 Lycée Carnot

19 juin 2012

Exercice 1 (Ecricome 2007)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

I. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que :
$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant a$$

II. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :
$$\forall t > a \qquad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$$
3. Montrer que pour tout entier n, non nul :
$$u_n \geqslant a$$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

III. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
3. Vérifier que :

$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 (Ecricome 2007)

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

I. Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

0.1 II. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A (c'est-à-dire que $\phi_A^3 - \phi_A = 0$). En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A (on pourra admettre que ce sont les racines du polynôme annulateur).
3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :
$$DN - ND = \lambda N$$
4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
   (b) En déduire que la famille (A,M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre ϕ_A associé à la valeur propre 0.
   (c) Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.
   (d) En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_1}associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2.
5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (Ecricome 2010)

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.

Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.

2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n.
   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.

Plus précisément on note :
T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $\mathrm{P}(T_1 = k)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.
2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
   (b) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(T_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(T_2 = 2)$.
   (c) Prouver que, pour $k \geqslant 3$, on a :
$$\mathrm{P}(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$$
   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (e) Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T_2 = k) = 1$.
   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
   (g) Calculer $E(T_2)$.