Fiche Méthode sur les Fonctions

ECE3 Lycée Carnot

20 mai 2012

Cette fiche-méthode n'est **PAS** un résumé du cours. Elle consiste en une liste de petits conseils permettant de repérer plus facilement les méthodes utiles dans des situations classiques, et d'éviter de tomber dans des pièges tout aussi classiques. Elle doit être complétée par une connaissance précise et rigoureuses des énoncés du cours.

Conseils

- En cas de forme indéterminée dans un calcul de limite faisant intervenir une racine carrée, la quantité conjuguée fait souvent des miracles.
- La racine carrée est une puissance comme les autres, on peut lui appliquer de la croissance comparée et la dériver en utilisant les formules usuelles pour les puissances.
- Le prolongement par continuité, comme son nom l'indique, suppose que la fonction reste continue une fois prolongée. Il faut donc que la valeur ajoutée coïncide avec une limite à cet endroit. Pour prouver qu'une fonction prolongée est dérivable (ou qu'elle ne l'est pas, d'ailleurs), le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ est la méthode la plus classique (on est prié de citer le théorème sur les copies) mais on peut aussi revenir à la définition en calculant un taux d'accroissement.
- Si on a déterminé un point d'inflexion lors d'une étude de fonction, quand on trace la courbe, on le place, ainsi que la tangente à cet endroit (il suffit de connaitre son coefficient directeur). La convexité permet même de vérifier la cohérence de certaines limites de temps à autre. Par exemple, une fonction ayant pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 ne peut pas être concave sur $]0;1[$ (faites un dessin pour vous en convaincre).
- Pour déterminer la monotonie d'une suite implicite (définie par $f_n(u_n) = 0$), on cherche à déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ (ou $f_n(u_{n+1})$ si vous préférez) et à exploiter la monotonie des fonctions f_n. Pour encadrer une telle suite, on se contente de calculer les valeurs de f_n pour le minorant/majorant recherché. Enfin, pour ce qui est de déterminer la limite, il faut en général faire un passage à la limite intelligent dans l'équation $f_n(u_n) = 0$.
- La limite (éventuelle) d'une suite récurrente est toujours un point fixe de la fonction. Ca ne signifie pas que si vous avez trouvé un point fixe à votre fonction, la suite va nécessairement converger.
- La monotonie d'une suite récurrente n'est PAS donnée par celle de la fonction correspondante. Si f est croissante, la suite sera monotone (mais pas forcément croissante), si f est décroissante, on ne peut rien dire. Pour déterminer la monotonie de (u_n) c'est le SIGNE de $f(x) - x$ (qui permet aussi de trouver les points fixes) qui est utile.
- Sans intervalle stable, impossible d'appliquer l'IAF. Et une fois l'intervalle trouvé, il faut bien sûr prouver que u_n est toujours dans cet intervalle (récurrence classique), et aussi que le point fixe qu'on va faire apparaitre dans l'IAF est dans ce même intervalle.

Les petits trucs en plus

- Si une fonction peut se mettre directement sous la forme $f(x) = ax + b + zoinx$, avec zoinx qui tend manifestement vers 0 à l'infini, inutile de faire trois pages de calculs pour déterminer une asymptote oblique, vous l'avez sous les yeux.
- Si on vous demande de prouver qu'il existe un UNIQUE réel vérifiant une certaine équation, c'est le théorème de la bijection que vous appliquez, pas le théorème des valeurs intermédiaires.
- Il peut être plus facile pour calculer des dérivées de quotient $\frac{u}{v}$ de les écrire sous la forme $u \times \frac{1}{v}$ et de les dériver comme des produits (ça évite des complications au moment de la mise au même dénominateur quand on a des racines carrées notamment).
- Si vous obtenez une majoration de $|f'|$ plus grande que 1 sur votre intervalle stable, inutile d'essayer d'appliquer l'IAF, ça ne servira à rien.