NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°6

ECE3 Lycée Carnot

4 avril 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 4$. Étudier les variations de f, puis majorer $|f'|$ sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
   On définit ensuite une suite (u_n) par $u_0 \geqslant 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$, puis prouver que $|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 4|$, et en déduire que $|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - 4|$. Déterminer enfin la limite de la suite (u_n).
   La fonction f est définie et dérivable sur $]2; +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x - 1} = \frac{1}{x-2}$. La fonction est donc strictement croissante sur $]2; +\infty[$. Par ailleurs, $\forall x \geqslant 4$, $x - 2 \geqslant 2$, donc $0 < \frac{1}{x-2} \leqslant \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   Prouvons par récurrence que $u_n \geqslant 4$: c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si $u_n \geqslant 4$, par croissance de la fonction f, on aura $f(u_n) \geqslant f(4)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 4$, puisque $f(4) = \ln(1) + 4 = 4$. Une fois que l'on sait que $u_n \in [4; +\infty[$, on peut appliquer l'IAF entre 4 et u_n pour obtenir à l'aide de la majoration de f' obtenue tout à l'heure que $|f(u_n) - f(4)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 4|$, soit $|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 4|$. Prouvons maintenant par récurrence que $|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - 4|$. C'est évident au rang 0, et si on le suppose vrai au rang n, en utilisant l'inégalité précédente, $|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|u_0 - 4| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - 4|$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on en déduit via le théorème des gendarmes que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - 4| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$.
2. Dans une urne se trouvent trois boules vertes et deux boules rouges. On tire successivement avec remise trois boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer les valeurs prises par X, puis prouver que $P(X = 1) = \frac{54}{125}$. Donner ensuite la loi complète de X, et calculer son espérance et sa variance.
   On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ (les tirages étant avec remise, on peut très obtenir trois boules rouges). Pour avoir une boule rouge, il faut choisir la position de la boule rouge, et le tirage correspondant a une probabilité $\frac{2}{5}$ de se produire, chacun des deux autres une proba $\frac{3}{5}$, soit $P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$. On obtient similairement $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$, et plus simplement $P(X = 0) = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$, et $P(X = 3) = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

On calcule ensuite $E(X) = \dfrac{54 + 2\times 36 + 3\times 8}{125} = \dfrac{150}{125} = \dfrac{6}{5}$ **;** $E(X^2) = \dfrac{54 + 4\times 36 + 9\times 8}{125} = \dfrac{270}{125} = \dfrac{54}{25}$ **et enfin** $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{54}{25} - \dfrac{36}{25} = \dfrac{18}{25}$**.**