NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

19 janvier 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler la définition d'une asymptote oblique, et celle d'une branche parabolique de direction (Oy).
   Voir le cours.

2. Étudier les branches paraboliques de la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{x\ln(x^2)}{x+1}$.

   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$ (seule la valeur 0, qui annule x^2, empêche le numérateur d'être défini). En $+\infty$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ (tout le reste est largement négligeable par rapport à l'exponentielle), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, et $\dfrac{x\ln(x^2)}{x+1} \underset{-\infty}{\sim} \ln(x^2) = 2\ln|x|$, donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2\ln|x|$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (encore de la croissance comparée), donc $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

   Reste le problème des éventuelles asymptotes verticales. En 0, $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2) = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$ (pas d'asymptote verticale). Du côté de -1, le quotient de droite est une affreuse forme indéterminée. Posons donc $y = x+1$, qui aura le bon gout de tendre vers 0 quand x tend vers -1, on a alors $\dfrac{x\ln(x^2)}{x+1} = \dfrac{(y-1)\ln((y-1)^2)}{y} = \dfrac{(y-1)\ln(1-2y+y^2)}{y}$. Le numérateur de cette fraction est équivalent quand y tend vers 0 (donc $-2y+y^2$ aussi) à $-(-2y+y^2) \sim 2y$ (le facteur $y-1$ tendant vers -1), donc le quotient est équivalent à $\dfrac{2y}{y} = 2$. On peut en conclure que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = e^{-1} + 2$. il n'y a pas non plus d'asymptote verticale en -1 (la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et en -1).

3. Déterminer les branches infinies et dresser le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2-6}{x+2}$. Donner une allure de la courbe représentative de g.

   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Comme le numérateur tend vers 2 en -2, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = +\infty$, d'où la présence d'une asymptote verticale.

   Du côté des infinis, on peut faire un calcul commun : $g(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{2x^2}{x} \sim 2x$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, et $\dfrac{g(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$. Enfin, $g(x) - 2x = \dfrac{2x^2-6-2x^2-4x}{x+2} =$

$\dfrac{-2x-6}{x+2} \underset{\pm\infty}{\sim} -4$. Finalement, la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $y = 2x - 4$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

La fonction est évidemment dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = \dfrac{4x(x+2) - (2x^2 - 6)}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x+2)^2}$. Elle est du signe de $x^2 + 4x + 3$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule les valeurs de $f(-3) = -12$ et $f(-1) = -4$. On peut aussi constater que $f(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{3}$, et que $f(0) = -3$ si on le souhaite.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
			$\Vert$ $+\infty$		$+\infty$
f		-12	$\Vert$	-4	
	$-\infty$		$-\infty$ $\Vert$