NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°4

ECE3 Lycée Carnot

24 novembre 2011

1. Rappeler la définition des suites adjacentes, ainsi que le principal théorème qui leur est attaché.
   Je vous laisse retrouver ça dans le cours. Le principal théorème est celui qui dit que deux suites adjacentes sont convergentes, et convergent vers la même limite.
2. Donner un équivalent simple de $u_n = \dfrac{3\sqrt{n} + 2\ln n}{e^{-n} + 6n + 1}$, et de $v_n = \dfrac{\sqrt{n^6 + n^4 + n^2}}{e^{n^2+3}} \ln\left(\dfrac{n^3+2}{n^3}\right)$.
   $u_n \sim \dfrac{3\sqrt{n}}{6n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$; et $v_n \sim \dfrac{\sqrt{n^6}}{e^{n^2} \times e^3} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n^3}\right) \sim \dfrac{n^3}{e^3 e^{n^2}} \times \dfrac{2}{n^3} \sim \dfrac{2}{e^3 e^{n^2}}$.
3. On définit une suite (u_n) par l'équation $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (lorsque $n \geqslant 1$). Déterminer le signe de u_n, puis la monotonie de la suite, et enfin sa limite. On pose ensuite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$. Calculer S_n et déterminer la limite éventuelle de la suite (S_n).
   Comme $n < n+1$, $u_n < 0$. **De plus,** $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) > 0$, **donc la suite est croissante. Elle est croissante majorée par** 1, **donc convergente, et comme** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. **Enfin, la somme** S_n **étant télescopique, elle se calcule aisément :** $S_n = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$, **qui a pour limite** $-\infty$.
4. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.
   - **C'est une petite récurrence. La propriété est vraie pour** u_0 **par hypothèse, et si on suppose que** $0 < u_n < 1$, **alors** $-1 < -u_n < 0$, **donc** $0 < 1 - u_n < 1$. **Tout étant positif, on peut multiplier les encadrement de** u_n **et** $1 - u_n$ **pour obtenir** $0 < u_n(1-u_n) < 1$, **c'est-à-dire** $u_{n+1} \in]0;1[$, **ce qui prouve l'hérédité de la propriété, qui est donc vraie pour tous les termes de la suite.**
   - **On calcule** $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = -u_n^2 < 0$. **La suite est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par** 0, **elle converge.**
   - **Notons** l **la limite de la suite, alors** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ **et** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(1-u_n) = l(1-l)$, **donc au vu de la relation de récurrence, on doit avoir** $l = l(1-l)$, **soit** $0 = -l^2$, **donc** $l = 0$. **La suite converge donc vers** 0.