NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°3

ECE3 Lycée Carnot

14 octobre 2011

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler les résultats du cours sur les variations d'une suite géométrique (sans démonstration).
Voir le cours...
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer par récurrence double que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2^n$.
Prouvons donc la propriété P_n : $u_n \geqslant 2^n$. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \geqslant 1$, et pour $n = 1$, $u_1 \geqslant 2$, donc l'initialisation double fonctionne. Supposons désormais vérifiées les propriétés P_n et P_{n+1}, c'est-à-dire $u_n \geqslant 2^n$ et $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$. On a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \geqslant 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$. Ceci prouve la propriété P_{n+2}. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier n par principe de récurrence.
3. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$. On pose $v_n = u_n^2$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, en déduire la valeur de u_n.
En effet, $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = 2 + u_n^2 = 2 + v_n$. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0^2 = 1$, donc $v_n = 1 + 2n$, puis $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 2n}$.
4. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Déterminer le terme général de la suite, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.
L'équation de point fixe de la suite est $x = 2x+1$, qui a pour unique solution $x = -1$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 1$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$, donc $u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.
Ensuite, $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - \sum_{k=0}^{k=n} 1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - n - 1 = 2^{n+1} - n - 2$.