Devoir Surveillé n°7 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 mai 2012

Exercice 1

1. Puisqu'il y a deux boules blanches dans l'urne, on ne peut pas tirer la première boule blanche au dernier tirage, mais au plus tard à l'avant-dernier, donc $X(\Omega) = \{1; 2; \dots; 19\}$. De même, il faut attendre le deuxième tirage pour pouvoir tirer la deuxième boule blanche, donc $Y(\Omega) = \{2; 3; \dots; 20\}$.
2. (a) Il faut ajouter un `Randomize;` puisqu'on fait ensuite des tirages aléatoires.

   (b) La variable n représente le nombre de boules restantes. Les tirages étant effectués sans remise, ce nombre diminue d'une unité à chaque tirage.

   (c) Il faut continuer les tirages (en modifiant uniquement les valeurs de n et y) jusqu'à obtenir l'unique boule blanche restante, qui sera par exemple représentée par 0 :

```
REPEAT r:=random(n) ;
n:=n-1 ; y:=y+1 ;
UNTIL r=0 ;
WriteLn(y) ;
```

   (d) Il faut ajouter une boucle `FOR` pour effectuer plusieurs simulations (en supprimant les affichages des valeurs de x et de y). Pour les calculs de moyenne, il suffit de créer deux nouvelles variables $m1$ et $m2$, auxquelles on ajoute respectivement les valeurs de x et de y après chaque simulation, avant de diviser la somme par le nombre de simulations à la fin pour obtenir la moyenne. Je donne directement le programme final :

```
PROGRAM simulation ;
USES wincrt ;
VAR m1,m2:real ; i,k,n,x,y,r:integer ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(k) ;
m1:=0 ; m2:=0 ;
FOR i:=1 TO k DO
BEGIN
n:=20 ; x:=0 ; y:=0 ;
REPEAT r:=random(n) ; n:=n-1 ; x:=x+1 ; y:=y+1 ;
UNTIL (r=0) OR (r=1) ;
m1:=m1+x ;
REPEAT r:=random(n) ; n:=n-1 ; y:=y+1 ;
UNTIL r=0 ;
m2:=m2+y ;
END ;
```

```
WriteLn(m1/k) ;
WriteLn(m2/k) ;
END.
```

3. Pour avoir $X = 1$, il faut tirer une boule blanche au premier tirage, donc $P(X = 1) = \frac{2}{20}$. Pour avoir $X = 2$, il faut tirer une boule noire, puis une boule blanche dans une urne où il n'y a plus que 19 boules, donc $P(X = 2) = \frac{18}{20} \times \frac{2}{19}$. Plus généralement, on aura par un raisonnement similaire $P(X = k) = \frac{18}{20} \times \frac{17}{19} \times \frac{16}{18} \times \cdots \times \frac{20-k}{20-k+2} \times \frac{2}{20-k+1} = \frac{2(20-k)}{2 \times 19}$ (au moment où on effectue le tirage numéro i, il reste $20 - i + 1$ boules dans l'urne, puisqu'on en a déjà enlevé $i - 1$).
4. C'est un calcul passionnant : $E(X) = \sum_{k=1}^{k=19} kP(X = k) = \frac{2}{20 \times 19} \sum_{k=1}^{k=19} 20k - k^2 = \frac{2}{20 \times 19} \times \frac{20 \times 19 \times 20}{2} - \frac{2}{20 \times 19} \times \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 20 - 13 = 7$.
5. Imaginez qu'on renverse complètement l'ordre des tirages. Les probabilités de tirages des boules blanches restent évidemment les mêmes, mais l'événement $X = 1$ (tirer une boule dès le premier tirage) devient alors $Y = 20$ (tirer la deuxième boule blanche au dernier tirage) ; $X = 2$ devient $Y = 19$; plus généralement, $X = k$ devient $Y = 21 - k$, ce qui explique que $21 - Y$ ait la même loi que X. De même, Y a la même loi que $21 - X$.
6. On a donc $\forall k \in Y(\Omega)$, $P(Y = k) = P(X = 21 - k) = \frac{2 \times (k-1)}{20 \times 19}$. De plus, par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 21 - E(X) = 14$. Cela revient à dire qu'en moyenne, on tire 6 boules noires avant la première boule blanche, 6 boules noires entre les deux boules blanches, et 6 boules noires après la deuxième boule blanche.

Exercice 2

1. On répète N fois une expérience ayant une probabilité $\frac{1}{6}$ de donner le résultat souhaité, donc $Z \sim \mathcal{B}\left(N; \frac{1}{6}\right)$. En particulier, $E(X) = \frac{N}{6}$, et $V(X) = N \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5N}{36}$.
2. Si on suppose qu'on lance 5 pièces, le nombre de Pile et Face obtenus suivent des lois binomiales : $X \sim \mathcal{B}(5; p)$, et $Y \sim \mathcal{B}(5, 1-p)$.
3. Là encore, en supposant $Z = n$, on est dans un cadre de loi binomiale, et $P_{Z=n}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Cette formule n'est valable que si $k \leqslant n$. Dans le cas contraire, la probabilité conditionnelle est nulle (on ne peut pas obtenir plus de Pile qu'on ne fait de lancers de pièce).
4. Cela découle assez immédiatement du résultat de la question précédente : $P((X = k) \cap (Z = n)) = P(Z = n) \times P_{Z=n}(X = k)$, et Z suivant une loi binomiale, $P(Z = n) = \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$ pour $n \leqslant N$, et $P(Z = n) = 0$ sinon. Les formules annoncées en découlent.
5. Les événements $(Z = 0)$, $(Z = 1)$, …, $Z = N$ formant un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X = 0) = \sum_{n=0}^{n=N} P((X = 0) \cap (Z = n)) = \sum_{n=0}^{n=N} \binom{n}{0} \binom{N}{n} p^0 (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{n=N} \binom{N}{n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$.
On reconnait ici la formule du binôme de Newton, qui permet de conclure que $P(X = 0) = \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right)^N = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N$.

6. Calculons le membre de gauche : $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Quant à celui de droite, il vaut $\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-k-n+k)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Les deux quantités sont bien égales.
   On peut alors écrire, sur le modèle du calcul de la question précédente (la somme part de $n=k$ car la probabilité conditionnelle est nulle si $k>n$), $P(X=k) = \sum_{n=k}^{n=N}\binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \binom{N}{k}p^k\sum_{n=k}^{n=N}\binom{N-k}{n-k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$. Un petit changement d'indice en posant $j=n-k$ donne alors $P(X=k)=\binom{N}{k}p^k\sum_{j=0}^{j=N-k}\binom{N-k}{j}(1-p)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{N-j-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{j+k} = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k\sum_{j=0}^{j=N-k}\binom{N-k}{j}\left(\frac{1-p}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-j}$. On reconnait à nouveau une formule du binome de Newton dans la somme pour obtenir $P(X=k) = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k\left(\frac{1-p}{6}+\frac{5}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k}p^k\left(1-\frac{p}{6}\right)N-k$.
7. On a en effet la formule attendue pour une loi binomiale de paramètre $\left(N;\frac{p}{6}\right)$. Un raisonnement identique en remplaçant p par $1-p$ donnerait évidemment $Y\sim\mathcal{B}\left(N;\frac{1-p}{6}\right)$.

Problème

I. Une première étude de fonction

1. La fonction i est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $i'(x) = 2x+1-2x\ln(x)-x = x+1-2x\ln(x)$; $i''(x) = 1-2\ln(x)-2 = -1-2\ln(x)$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} i(x) - 2$. La fonction est donc prolongeable par continuité en posant $i(0)=-2$. De plus, un calcul similaire donne $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = 1$. Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet alors d'affirmer que i est dérivable en 0, et que $i'(0)=1$.
3. Il faut étudier le signe de $i''(x) = -1-2\ln(x)$. Cette expression s'annule lorsque $\ln(x) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. La fonction i est convexe sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, et concave sur $\left]\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$. L'unique point d'inflexion a pour abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Comme $i\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}-2-\frac{1}{e}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2e}+\frac{1}{\sqrt{e}}-2$, et $i'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}+1-\frac{2}{\sqrt{e}}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}+1$, l'équation de la tangente en ce point a pour équation $y = \left(\frac{2}{\sqrt{e}}+1\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\frac{3}{2e}+\frac{1}{\sqrt{e}}-2$ (on peut développer si on le souhaite, mais ça ne se simplifie pas vraiment).
4. L'étude du signe de i'' permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour i' :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
i'	1	$\frac{2}{\sqrt{e}}+1$	$-\infty$

En effet, $i'(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x\ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} i'(x) = -\infty$. La fonction i' est donc strictement positive sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, et effectue ensuite une bijection de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur $\left]-\infty; \frac{2}{\sqrt{e}}+1\right]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$ tel que $i'(\alpha) = 0$. Comme par ailleurs $i'(1) = 2 > 0$, et que i' est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$, on a bien $\alpha > 1$.

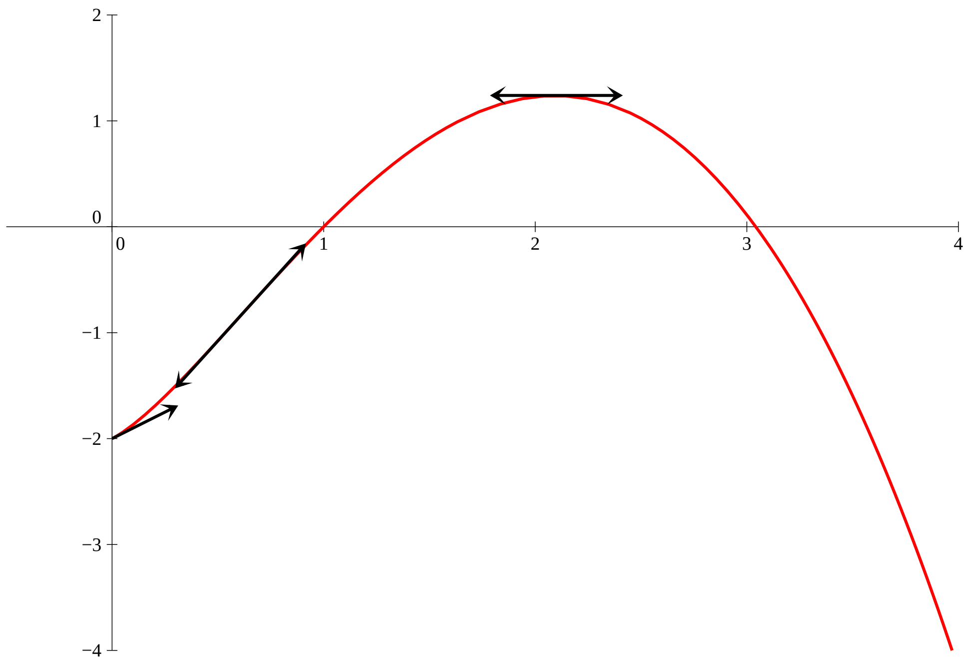
5. On déduit du signe de i' le tableau de variations de i :

x	0	1	α	$+\infty$
i	-2	0	$i(\alpha)$	$-\infty$

En effet, $i(0) = 1 + 1 - 2 - 0 = 0$, et comme $i(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $i(\alpha) > 0$, et en exploitant la bijectivité de i de $[\alpha; +\infty[$ sur $]-\infty; \alpha]$, on obtient l'existence d'un unique $\beta \in [\alpha; +\infty[$ tel que $i(\beta) = 0$.

6. On a déjà vu à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$. De plus, $\frac{i(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{i(x)}{x} = -\infty$, et la courbe de i admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

7. Pour tracer l'allure sur votre copie, puisqu'on donnait $\alpha \simeq 2$, vous pouviez calculer une valeur approchée du maximum : $i(\alpha) \simeq i(2) \simeq 4 - 4\ln(2) \simeq 1,2$. Il fallait bien entendu que la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 et en $\beta \simeq 3$, il fallait placer la tangente de pente 1 au point de départ $(0; -2)$ de la courbe, et placer la tangente au point d'inflexion en utilisant que $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $i\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq -0,85$ et $i'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 2,2$. Sans oublier enfin la branche parabolique à respecter en $+\infty$, ce qui donne une courbe de ce type :



II. Une deuxième étude de fonction

1. Avec un $\ln(x)$ au dénominateur de la fraction, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Mais en utilisant l'équivalent rappelé dans l'énoncé, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} \sim \dfrac{x+2}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x} = 3$, on peut en effet prolonger la fonction par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0^-$, et $\lim\limits_{x\to 0} (x+2)(x-1) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x\ln(x)} \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$, et c'est à nouveau la croissance comparée qui permet de conclure : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. La fonction f est dérivable partout sauf éventuellement en 1 comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x\ln(x)) - (\ln(x)+1)(x^2+x-2)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2} \times g(x)$. Comme $\dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2}$ est toujours strictement positif, f' est bien du signe de g.
4. Question supprimée (en fait, $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$, mais l'équivalent du ln ne suffit pas, il faut un développement limité).
5. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x^3+x^2+4x+2-2x^3-2x^2+4x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{(x^2+2)^2 + x(x^2-8x-2)}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{x^4+4x^2+4-x^3-8x^2-2x}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{h(x)}{x(x^2+2)^2}$. Le dénominateur de cette fraction étant toujours positif sur $]0;+\infty[$, g' est bien du signe de h.
6. En effet, $h(1) = 1+1-4-2+4 = 0$ et $h(-2) = 16-8-4\times 8+4+4 = 0$. On peut donc factoriser h sous la forme $h(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+c) = (x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$. On doit donc avoir, en développant, $ax^4 + (a+b)x^3 + (c+b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$. Par identification, on obtient les conditions $a = 1$; $a+b = 1$; $c+b-2a = -2$; $c-2b = -2$ et $-2c = 4$, ce qui donne la solution unique $a = 1$; $b = 0$ et $c = -2$. Autrement dit, $h(x) = (x-1)(x+2)(x^2-2)$. On peut alors dresser le tableau de signe de h sur $]0;+\infty[$, et le tableau de variations de g sur ce même intervalle :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$	4	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour remplir ce tableau, on a calculé $g(1) = 0 - \dfrac{0}{3} = 0$; constaté que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$; et que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. La lecture du tableau de variations (on invoquera à nouveau le théorème de la bijection pour être très rigoureux) permet en effet de constater que g s'annule une deuxième fois sur l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$. Comme g est négative sur $]0; \lambda]$ et positive sur $[\lambda; +\infty[$, on a le tableau de variations suivant pour f :

x	0		λ		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 2,9$	$\nearrow$	$+\infty$

III. Une suite récurrente

1. D'après la dernière question de la partie précédente, f est, selon la valeur de λ, soit croissante, soit décroissante puis croissante sur $[2; 4]$. dans les deux cas, toutes les valeurs qu'elle prend sont plus grandes que $f(\lambda)$, donc supérieures à 2 (en fait, on peut déterminer la position de λ par rapport à 2 en calculant $g(2) = \ln(2) - \dfrac{2}{3} > 0$; on a donc $\lambda < 2$, et f est croissante sur $[2; 4]$). De plus, $f(2) = \dfrac{4}{2\ln(2)} = \dfrac{2}{\ln(2)} < 4$ car $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$; et $f(4) = \dfrac{18}{4\ln(4)} = \dfrac{9}{4\ln(2)} \simeq \dfrac{9}{2,8} < 4$. On en déduit que $f([2; 4]) \subset [2; 4]$. On peut alors prouver par récurrence que $u_n \in [2; 4]$. C'est certainement vrai pour $u_0 = 2$, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [2; 4]$ au vu du calcul précédent.

2. On constate que $f(x) - x = \dfrac{i(x)}{x\ln(x)}$. On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x	0		1		β		$+\infty$
$i(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - x$		$+$	2	$+$	0	$-$	

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution $x = \beta$.

3. Il suffit donc de calculer $f'(2) = \dfrac{6\ln 2 - 4}{(2\ln(2))^2} \simeq \dfrac{0,2}{(2\ln(2))^2} > 0$ (peut importe la valeur exacte, puisque f' est croissante sur $[2; 4]$, elle atteindra sa plus grande valeur en 4) et $f'(4) = \dfrac{36\ln(2) - 18}{(4\ln(4))^2} = \dfrac{18(2\ln(2)-1)}{64(\ln(2))^2} = \dfrac{9(2\ln(2)-1)}{32(\ln(2))^2} \simeq \dfrac{3,6}{16} < \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. On a donc, $\forall x \in [2; 4]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, et a fortiori $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

4. (a) Tous les élémentes permettant d'apppliquer l'IAF sont réunis : la valeur absolue de la dérivée est majorée sur $[2; 4]$, $u_n \in [2; 4]$, et $\beta \in [2.4]$ au vu de la valeur approchée donnée dans l'énoncé. De plus, $f(\beta) = \beta$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, ce qui permet bien d'obtenir $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$.

(b) C'est la récurrence hyper classique. Pour $n = 0$, $|u_0 - \beta| = |2 - \beta| < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0. En supposant l'inégalité vraie au rang n, on applique successivement le résultat donné par l'IAF et l'hypothèse de récurrence pour obtenir $|u_{n+1}-\beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{2}{4^n} = \frac{2}{4^{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.