Devoir Surveillé n°7

ECE3 Lycée Carnot

4 mai 2012

Exercice 1

Une urne contient 20 boules, dont deux sont blanches, et les 18 restantes sont noires. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne, et on note X le rang du tirage de la première boule blanche, et Y le rang du tirage de la deuxième boule blanche (les deux boules blanches sont indistinguables, on aura toujours $X < Y$).

1. Quelles sont les valeurs prises par les variables aléatoires X et Y ?
2. On considère le programme Pascal suivant, où on assimile pour simplifier les boules de l'urne aux entiers compris entre 0 et 19, et les deux boules blanches à 0 et 1. Ce programme effectue une simulation de la variable aléatoire X :

```
PROGRAM simulation ;
USES wincrt ;
VAR n,x,y,r : integer ;
BEGIN
?????
n:=20 ; x:=0 ; y:=0 ;
REPEAT r:=random(n) ;
n:=n-1 ; x:=x+1 ; y:=y+1 ;
UNTIL (r=0) OR (r=1) ;
WriteLn(x) ;
(à compléter)
END.
```

   (a) Quelle instruction indispensable manque-t-il à la place des `?????` ?
   (b) Que représente la variable n dans ce programme ? Pourquoi fait-on l'opération `n:=n-1` à chaque étape de la boucle ?
   (c) Compléter la fin du programme pour qu'il effectue également la simulation de la variable aléatoire Y.
   (d) Réécrire le programme pour qu'il effectue désormais un nombre k choisi par l'utilisateur de simulations des variables aléatoires X et Y (on ne demande pas de faire afficher les résultats de ces simulations, inutile donc de vous embêter à faire intervenir des tableaux).
   (e) Compléter enfin ce dernier programme pour qu'il affiche la moyenne des valeurs obtenues pour x et y.
3. Calculer $P(X = 1)$, puis $P(X = 2)$. Justifier que $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \dfrac{2(20 - k)}{20 \times 19}$.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
5. Justifier que la variable aléatoire $21 - Y$ suit la même loi que la variable X.
6. En déduire sans calculs supplémentaires la loi et l'espérance de Y.

Exercice 2 (d'après EMLyon 1997)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
- X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
- Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. On suppose (uniquement pour cette question) que $Z = 5$. Quelle sont alors les lois des variables X et Y ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.
4. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   - si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = 0$.
5. Calculer la probabilité $P(X = 0)$
6. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, on a $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$. En déduire la probabilité $P(X = k)$.
7. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.

   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y (sans calcul) ?

Problème (partiellement inspiré d'une petite partie de HEC 1990)

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\frac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2 \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Étudier la convexité de la fonction i. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i en son unique point d'inflexion.
4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0; +\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Étudier la branche parabolique de i en $+\infty$.
7. Tracer une allure la plus précise possible de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en posant $f(1) = 3$ (on rappelle que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$).
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -1$ (on pourra réutiliser l'équivalent rappelé à la question 1).
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).

III. Une suite récurrente

On définit désormais une suite récurrente (u_n) en posant $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f([2;4]) \subset [2;4]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. En exploitant les résultats de la première partie, donner le signe de $f(x) - x$ et en déduire que β est l'unique point fixe de la fonction f.
3. En **admettant** que la fonction f' est croissante sur $[2;4]$, montrer que $\forall x \in [2;4]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Montrer successivement les propriétés suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{2}{4^n}$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.