Révisions DS6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

6 mars 2012

1. (a) Après un tirage on a forcément tiré une seule boule donc $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$. Après deux tirages on a toujours $c_2 = 0$, mais $a_2 = \frac{1}{3}$ (une chance sur trois de retomber sur la même boule qu'au premier tirage) et $b_2 = \frac{2}{3}$.

   (b) Commençons par la fin, c'est plus simple : si on a déjà tiré les trois boules après n tirages, ce sera toujours le cas après $n+1$, donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 0$. Si on a tiré seulement deux boules après n tirages, il y a une chance sur trois de tirer la boule non encore tirée, donc $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$; $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$. De même, on obtient $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$; $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

   (c) Via la formule des probabilités totales (les événements A_n, B_n et C_n formant évidemment un système complet), on obtient facilement, en utilisant les résultats de la question précédente, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$; puis $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$ et enfin $c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n$. Il suffit donc de poser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir la relation souhaitée.

   (d) C'est la récurrence débile qu'on vous demande de faire à chaque fois. C'est vrai au rang 1, et si on le suppose au rang n, alors $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M.M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, ce qui achève la récurrence.

2. (a) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

   (b) Cela se prouve évidemment par récurrence. C'est certainement vrai au rang 1 en posant $u_1 = 2$, $v_1 = 0$ et $t_1 = 1$ (il suffit de regarder A, on peut même commencer à $n = 0$ en posant $u_0 = v_0 = t_0 = 0$). Si on le suppose vrai au rang n, on peut écrire $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n + 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_n + 2t_n & 2t_n + 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$. Tout cela fonctionne parfaitement, avec les relations $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$; $v_{n+1} = v_n + 2t_n$ et $t_{n+1} = 2t_n + 3^n$. On pouvait également obtenir A^{n+1} en faisant le produit $A \times A^n$, ce qui change les relations de récurrence et donne $u_{n+1} = 2 + 2u_n$; $v_{n+1} = u_n + 3v_n$ et $t_{n+1} = 2^n + 3t_n$.

   (c) D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}$, donc $\sum_{i=1}^{i=n-1} u_{i+1} - u_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} 2^{i+1} = \sum_{i=2}^{i=n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 - 2 = 2^{n+1} - 4$. Par ailleurs, la somme qu'on vient de calculer est télescopique, et égale à $u_n - u_1$. Conclusion : $u_n = u_1 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 2$.

(d) Le principe est le même, la somme télescopique vaut $\frac{t_n}{2^n} - \frac{t_1}{2}$, mais est aussi égale à $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2t_i + 3^i}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{3}{2})^n}{1-\frac{3}{2}} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}$, d'où finalement en multipliant tout par 2^n, $t_n = 2^{n-1}t_1 + 3^n - 3 \times 2^{n-1} = 3^n - 2 \times 2^{n-1} = 3^n - 2^n$.
Remarques complémentaires : si on préfère travailler avec les autres relations de récurrence (obtenues en faisant le produit de A^n par A), le calcul de t_n peut s'effectuer de façon très similaire en utilisant cette fois-ci la somme $\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{t_{i+1}}{3^{i+1}} - \frac{t_i}{3^i}$. Pour le calcul de (u_n), par contre, pas besoin de complications puisqu'on a directement une relation de récurrence arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 2 + 2x$, ce qui donne $x = -2$. La suite définie par $v_n = u_n+2$ est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1}+2 = 2u_n+4 = 2(u_n+2) = 2v_n$, de raison 2 et de premier terme $v_1 = u_1 + 2 = 4$, donc $v_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, et $u_n = v_n - 2 = 2^{n+1} - 2$.

En fait, on peut faire encore plus rapide en utilisant simultanément les deux relations de récurrence : $u_{n+1} = 2 + 2u_n$ et $u_{n+1}u_n + 2^{n+1}$, donc $2 + 2u_n = u_n + 2^{n+1}$, ce qui donne directement $u_n = 2^{n+1} - 2$. De même, on aura $2t_n + 3^n = 2^n + 3t_n$, donc $t_n = 3^n - 2^n$. On peut ensuite obtenir très facilement la valeur de v_n par la même méthode : $v_n + 2t_n = u_n + 3v_n$, donc $2v_n = 2t_n - u_n = 2 \times 3^n - 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$, donc $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

3. (a) Comme $M = \frac{1}{3}A$, on aura évidemment $M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}A^{n-1}$. Il ne reste plus qu'à multiplier tout ça par la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à garder la première colonne de la matrice M^{n-1}, ce qui donne $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$; $b_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ et $c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

(b) Les deux premières suites ont pour limite 0 (somme de suites géométriques de raison inférieure à 1), la dernière tend vers 1. Cela parait tout à fait normal : quand on fait plein de tirages, la probabilité de tirer les trois boules se rapproche de 1.

(c) Il faut donc avoir $\frac{1}{3^{n-1}} \leqslant \frac{1}{100}$, soit $3^{n-1} \geqslant 100$, ce qui se produit dès que $n = 6$.