

Révisions pour le DS6

ECE3 Lycée Carnot

6 mars 2012

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de boules différentes obtenues à l'issue de ces n tirages. On note ainsi A_n l'évènement « Après n tirages, une seule boule a été tirée », B_n l'évènement « Après n tirages, deux boules distinctes ont été tirées » et C_n l'évènement « À l'issue des n tirages, les trois boules ont été tirées ». On notera également a_n , b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. (a) Déterminer a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 et c_2 .
- (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.

(c) En déduire l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(d) Prouver que, $\forall n \geq 1$,
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 .

(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels u_n , v_n et t_n tels que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix},$$
 et déterminer par la même occasion des relations de récurrence vérifiées par les suites (u_n) , (v_n) et (t_n) .

(c) En calculant $\sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1} - u_i$, prouver que $u_n = 2^{n+1} - 2$.

(d) En vous servant de même de $\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}$, déterminer la valeur de t_n .

On admet qu'on pourrait obtenir similairement $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

3. (a) Exprimer M en fonction de A et en déduire la valeur de M^{n-1} , puis celles de a_n , b_n et c_n .
- (b) Déterminer les limites de ces trois suites. Les résultats obtenus sont-ils logiques ?
- (c) À partir de quelle valeur de n a-t-on plus de 99% de chances d'avoir tiré au moins deux boules différentes ?