Devoir Surveillé n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

20 mars 2012

Exercice 1

1. Lorsque $M = I$, on a simplement $S_n = \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right) I$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = e$, l'exponentielle de la matrice identité est simplement la matrice $eI = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.
2. La matrice A est évidemment nilpotente, on obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\forall k \geqslant 3$, $A^k = 0$. On en déduit que $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la suite de matrices (S_n) étant constante à partir du rang 2).
3. Les matrices A et I commutent certainement, donc $B^n = (A + I)^n = \sum_{k=0}^{k=2} \binom{n}{k} A^k I^{n-k} = I + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$ (formule évidemment valable à partir de $n = 2$). Soit $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1)) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (le dernier coefficient de la première ligne valant $3 \times n + 4 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(3+2n-2) = n(2n+1)$).
4. La matrice S_n sera bien sûr triangulaire supérieure. Ses coefficients diagonaux sont tous égaux à $1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Les deux coefficients juste au-dessus de la diagonale (première ligne deuxième colonne, et deuxième ligne troisième colonne) sont égaux à $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2k}{k!}$; enfin le coefficient du coin (première ligne, troisième colonne) vaut $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k(2k-1)}{k!}$. Sur la diagonale, les coefficients on pour limite e comme dans le cas de l'identité. Les deux suivants valent après simplification $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2}{k!}$, somme qui converge vers $2e$. Enfin, le dernier coefficient vaut $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k+1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2k+3}{k!} = 2\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{(k-1)!} + 3\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k!}$, qui converge vers $5e$. Finalement, $e^B = \begin{pmatrix} e & 2e & 5e \\ 0 & e & 2e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. On constate que $e^B = e \times e^A = e^I \times e^A$.
5. On calcule donc $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, puis on constate sans difficulté que $C^2 - 2C + I = 0$.

6. On peut prouver par récurrence la propriété $P_n : C^n = nC - (n-1)I$. Pour $n = 0$, on a en effet $C^0 = I = O \times C - (-1) \times I$. Supposons la propriété vraie au rang n, alors $C^{n+1} = C \times C^n = C(nC - (n-1)I) = nC^2 - (n-1)C = n(2C - I) - (n-1)C = (n+1)C - nI$, ce qui prouve exactement P_{n+1} (on a utilisé le calcul de la question précédente pour simplifier C^2). Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.
7. Calculons donc $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} C^k = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(kC - (k-1)I) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(k-1)!} C - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k-1}{k!} I$. On peut constater que $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = -\frac{1}{n!}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$, les termes de la matrice $\frac{1}{n!} I$ tendent donc vers 0. On en déduit que $e^C = eC$ (la somme devant le facteur C de S_n convergeant vers e comme vu dans la question précédente).

Exercice 2

I. Probabilité de gain du joueur A

1. Personne ne peut gagner avant qu'au moins trois lancers aient été effectués, donc $P(A_1) = P(A_2) = 0$. Pour que A gagne au troisième lancer, il faut que les trois premiers lancers aient donné PPF, ce qui donne $P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Pour que A gagne après le quatrième lancer, il faut avoir obtenu $PPPF$ (la suite $FPPF$ ne convient pas, car B aurait gagné au troisième lancer avant que A ne puisse avoir une chance de gagner au quatrième). On a donc $P(A_4) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.
2. Les trois derniers lancer doivent être PPF pour que A gagne. Supposons alors qu'il y ait eu un (ou plus) lancer tombant sur Face avant le lancer numéro n, et considérons l'avant-dernier lancer ayant donné Face (le Face précédant celui du lancer n, donc). Ce Face est nécessairement suivi de deux Pile, puisqu'il n'y a pas d'autre Face entre lui et le lancer n (mais nécessairement au moins deux Pile aux lancers $n-1$ et $n-2$), ce qui implique que le joueur B a forcément gagné avant le lancer n. Conclusion de ce petit raisonnement par l'absurde : si A gagne, le Face du lancer n est forcément le seul. Autrement dit, la suite de lancer est $PP \dots PPF$, qui a une probabilité $\frac{1}{2^n}$ de se produire.
3. L'événement dont on veut calculer la probabilité ici est simplement l'union disjointe de A_3, A_4, ..., A_n, donc sa probabilité vaut $\sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=n-3} \frac{1}{2^{k+3}} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{k=n-3} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{8} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)$. La limite de cette expression est $\frac{1}{4}$, le joueur A a donc une chance sur quatre de gagner.
4. S'il ne peut pas y avoir de match nul (ou du moins si la probabilité de cette éventualité est nulle), la probabilité que B gagne est complémentaire de celle que A gagne, donc égale à $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Le joueur B a donc trois fois plus de chances de gagner que le joueur 1 (ce qui n'est pas extrêmement intuitif).

II. Temps d'attente du premier PPF

1. Elle vaut simplement $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
2. On a manifestement $C_n = D_3 \cup D_4 \cup \cdots \cup D_n$ (le PPF ne pouvant bien sûr pas apparaitre avant le tirage numéro 3).

3. Les événements D_3, D_4 et D_5 étant incompatibles (en effet, D_3 ne peut se produire que si on tire un Face au troisième lancer, ce qui est incompatible avec D_4 et D_5 ; de même, D_4 impose un Face au quetrième lancer et D_5 un Pile), donc $P(C_3) = P(D_3) = \frac{1}{8}$; $P(C_4) = P(D_3 \cup D_4) = P(D_3) + P(D_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; et $P(C_5) = P(D_3) + P(D_4) + P(D_5) = \frac{3}{8}$.
4. Pour que C_{n+1} soit réalisé, il faut obtenir un PPF avant le lancer $n+1$, donc soit avant le lancer n (ce qui correspond à l'événement C_n), soit précisément au lancer $n+1$ (ce qui correspond à D_{n+1}). Autrement dit $P(C_{n+1}) = P(C_n \cup D_{n+1}) = P(C_n) + P(D_{n+1}) - P(C_n \cap D_{n+1})$. Or, $C_n \cap D_{n+1} = (D_3 \cup D_4 \cup \cdots \cup D_n) \cap D_{n+1}$, et D_{n+1} est incompatible avec D_n et D_{n-1} (puisque D_{n+1} impose des Pile aux lancers n et $n-1$), mais indépendant de D_3, D_4, ..., D_{n-2} (puisque D_{n+1} n'impose rien sur les lancers précédant le lancer numéro $n-1$). Conclusion : $P(C_n \cap D_{n+1}) = P((D_3 \cup D_4 \cup \cdots \cup D_{n-2}) \cap D_{n+1}) = P(C_{n-2} \cap D_{n+1}) = P(C_{n-2}) \times P(D_{n+1}) = \frac{1}{8} P(C_{n-2})$, et la formule demandée en découle.
5. PROGRAM tropfacile ;

```
USES wincrt ;
VAR u,v,w,t :real ; n,i :integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez une valeur de n plus grande que 3') ;
ReadLn(n) ;
u :=1/8 ; v :=1/4 ; w :=3/8 ;
FOR i :=4 TO n DO
BEGIN
t :=w+(1-u)/8 ;
u :=v ; v :=w ; w :=t ;
END ;
Writeln(t) ;
END.
```

6. Posons donc $u_n = P(C_n) - 1$, ou si l'on préfère $P(C_n) = u_n + 1$. En reprenant la relation de la question précédente, on a donc $u_{n+1} + 1 = u_n + 1 - \frac{1}{8}(1 - u_{n-2} - 1)$, soit $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{8} u_{n-2}$. En décalant la relation, on aura, pour tout entier n, $u_{n+3} = u_{n+2} - \frac{1}{8} u_n$, ce qui est bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.
7. L'équation caractéristique est l'équation du troisième degré $x^3 - x^2 + \frac{1}{8} = 0$. Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x^3 - x^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0$, donc $\frac{1}{2}$ est bien racine évidente. On peut donc factoriser sous la forme $x^3 - x^2 + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + \left(b - \frac{1}{2}a\right)x^2 + \left(c - \frac{1}{2}b\right)x - \frac{1}{2}c$. une petite identification donne alors $a = 1$; $b - \frac{1}{2}a = -1$, donc $b = -\frac{1}{2}$; et $c = -\frac{1}{4}$, donc $x^3 - x^2 + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$. La parenthèse a les mêmes racines que $4x^2 - 2x - 1$, trinome de discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, admettant pour racines $r = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $s = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$.
8. Au vu des calculs précédants, on peut écrire $u_n = \alpha \times \frac{1}{2^n} + \beta \times r^n + \gamma \times s^n$. Inutile de calculer α, β et γ pour déterminer la limite, il suffit de constater que $r \in]-1;1[$ (en effet, $r > 0$ et $\sqrt{5} < 3$, donc $1 + \sqrt{5} < 4$) et $s \in]-1;1[$ (en effet, $s < r$, et $1 - \sqrt{5} > -2$, donc $s > -\frac{1}{2}$)

pour affirmer que chacune des trois suites géométriques sera de limite nulle, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Comme $P(C_n) = u_n + 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$. Cela prouve en fait que, lors d'une série infinie de lancers, la probabilité de ne jamais avoir de PPF est nulle. On peut prouver à partir de cette observation que la probabilité d'un match nul est égale à 0, comme cela était affirmé en fin de première partie.

9. Il suffit de définir des événements C'_n et D'_n calqués sur C_n et D_n, mais avec des FPP au lieu des PPF. Leurs probabilités seront les mêmes que celles de C_n et D_n (tous les raisonnements effectués restent valables).

10. En gros, on a prouvé que la probabilité que le premier PPF et le premier FPP se produisent à un moment donné (quel que soit ce momentà sera toujours la même, et pourtant le premier FPP apparait trois fois plus souvent avant le premier PPF que le contraire. Ce résultat contre-intuitif est connu sous le nom de paradoxe de Walter Penney.

11. Il faut déterminer les coefficients α, β et γ définis un peu plus haut, à l'aide d'un système de trois équations à trois inconnues. On connait $P(C_3)$, $P(C_4)$ et $P(C_5)$, ce qui permet évidemment d'obtenir u_3, u_4 et u_5, mais les calculs vont être très pénibles. On peut en fait très bien partir de $P(C_0) = P(C_1) = P(C_2) = 0$ (je vous laisse vérifier que la relation de récurrence est alors valable), soit $u_0 = u_1 = u_2 = -1$. Le système donne alors $\alpha+\beta+\gamma = -1$; $\frac{1}{2}\alpha + r\beta + s\gamma = -1$ et $\frac{1}{4}\alpha + r^2\beta + s^2\gamma = -1$. En effectuant les opérations $2L_2 - L_1$ et $4L_3 - L_1$, on obtient $(2r-1)\beta + (2s-1)\gamma = -1$ et $(4r^2-1)\beta + (4s^2-1)\gamma = -3$. Comme $4r^2 - 1 = (2r-1)(2r+1)$, on a alors $(4s^2-1)\gamma - (2r+1)(2s-1)\gamma = -3 + (2r+1) = 2r - 2 = 2(r-1)$, d'où $\gamma = \frac{2(r-1)}{4s^2 - 1 - (2r+1)(2s-1)}$. Or, $4s^2 - 1 - (2s-1)(2r+1) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1 + \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Et $2(r-1) = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$, donc $\gamma = \frac{\sqrt{5}-3}{5+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-3)(5-\sqrt{5})}{25-5} = \frac{8\sqrt{5}-20}{20} = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1$. Ensuite, comme $(2r-1)\beta + (2s-1)\gamma = -1$, $\beta = \frac{(1-2s)\gamma - 1}{2r-1}$, avec $2r - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; et $(1-2s)\gamma - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\gamma - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-3\sqrt{5}-5}{10}$, donc $\beta = \frac{3\sqrt{5}+5}{5(1-\sqrt{5})} = \frac{(3\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})}{5(1-5)} = -\frac{20+8\sqrt{5}}{20} = -\frac{2}{\sqrt{5}} - 1$ (il y a sûrement beaucoup plus rapide). Enfin, $\alpha = -1 - \beta - \gamma = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 = 1$. Finalement, $u_n = \frac{1}{2^n} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

Exercice 3

I. Étude du mouvement du jeton A.

1. Pour que le jeton ne change jamais de case, il faut qu'à chaque lancer, le dé tombe sur 3, 4, 5 ou 6, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{2}{3}$ à chaque fois. Au bout de n lancers, la proba que le jeton A n'ait jamais bougé vaut donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. Les événements X_n et Y_n formant un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X_{n+1}) = P(X_n) \times P_{X_n}(X_{n+1}) + P(Y_n) \times P_{Y_n}(X_{n+1})$. Or, $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}$ (c'est la probabilité que le jeton A ne change pas de case lors

d'un lancer de dé), et $P_{Y_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ (il faut cette fois que le jeton change de case). On a donc $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n$. On obtient de même $y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{2}{3}y_n$.

3. Comme $y_n = 1-x_n$ (les événements sont complémentaires), $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n+\dfrac{1}{3}(1-x_n) = \dfrac{1}{3}x_n+\dfrac{1}{3}$. La suite est arithmético-gémétrique, d'équation de point fixe $x = \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$, ce qui donne $\dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{3}$, soit $x = \dfrac{1}{2}$. En notant $v_n = x_n - \dfrac{1}{2}$, on a alors $v_{n+1} = x_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}x_n - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\left(x_n - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = x_0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (avant le premier lancer de dé, on sait que le jeton A se trouve dans la case $C-1$). Conclusion : $v_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3^n}$ et $x_n = v_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{3^n}\right)$. Ensuite, $y_n = 1 - x_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$.

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$, les deux suites ont pour limite $\dfrac{1}{2}$. À long terme, le jeton A se trouve donc la moitié du temps dans chaque case.

II. Étude des mouvements du couple de jetons.

1. Pour $n = 0$, on a bien sûr $P(E_0) = 1$ et $P(F_0) = P(G_0) = P(H_0) = 0$. Après le premier lancer, $P(E_1) = P(F_1) = P(G_1) = \dfrac{1}{3}$ et $P(H_1) = 0$ (on ne peut pas changer les deux jetons de case simultanément, et les trois autres situations sont équiprobables, correspondant chacune à deux résultats possibles du lancer de dé). Ensuite, ça se complique, il vaut mieux utiliser la formule des probabilités totales. Constatons que $P_{E_n}(E_{n+1}) = P_{E_n}(F_{n+1}) = P_{E_n}(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$, et $P_{E_n}(H_{n+1}) = 0$ (c'est exactement ce qu'on vient d'utiliser pour le calcul des probabilités après un lancer). De même, $P_{F_n}(E_{n+1}) = P_{F_n}(F_{n+1}) = P_{F_n}(H_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{F_n}(G_{n+1}) = 0$ (encore une fois, la probabilité nulle correspondrait à un changement de case simultané des deux jetons). On aurait de façon similaire $P_{G_n}(F_{n+1}) = P_{H_n}(E_{n+1}) = 0$, les six dernières probabilités conditionnelles valant chacune $\dfrac{1}{3}$. Il ne reste plus qu'à écrire quatre fois la formule des probabilités totales pour obtenir $P(E_{n+1}) = \dfrac{1}{3}P_{E_n} + \dfrac{1}{3}P(F_n) + \dfrac{1}{3}P(G_n)$; $P(F_{n+1}) = \dfrac{1}{3}(P(E_n)+P(F_n)+P(H_n))$; $P(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}(P(E_n)+P(G_n)+P(H_n))$; et $P(H_{n+1}) = \dfrac{1}{3}(P(F_n)+P(G_n) + P(H_n))$. À l'aide de ces formules, on calcule $P(E_2) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$; $P(F_2) = P(G_2) = P(H_2) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + 0\right) = \dfrac{2}{9}$; puis $P(E_3) = P(F_3) = P(G_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{7}{27}$ et enfin $P(H_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{2}{9}$.

2. Il suffit de reprendre les formules de récurrence de la première question pour obtenir $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. C'est la récurrence classique : c'est vrai au rang 0 puisque $M^0 \times Z_0 = I \times Z_0 = Z_0$, et en supposant la formule vraie au rang n, on aura $M^{n+1} = M \times Z_n = M \times M^n Z_0 = M^{n+1}Z_0$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$ et achève la récurrence. Vu les données initiales, on a

$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Sans difficulté particulière, $M^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, puis $M^4 = (M^2)^2 = \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 21 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 21 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 21 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

5. On va bien entendu procéder par récurrence. La propriété est vraie pour $p = 0$ en prenant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$, mais aussi pour $p = 1$ avec $\alpha_1 = \dfrac{2}{9}$ et $\beta_1 = \dfrac{1}{9}$ au vu du calcul de M^2 (cette vérification est nécesaire pour l'hérédité). Supposons désormais que $M^{2p} = \alpha_p J + \beta_p I$, alors $M^{2(p+1)} = M^{2p+2} = M^2 \times M^{2p} = \left(\dfrac{2}{9}J + \dfrac{1}{9}I\right)(\alpha_p J + \beta_p J) = \dfrac{2}{9}\alpha_p J^2 + \dfrac{2}{9}\beta_p J + \dfrac{1}{9}\alpha_p J + \dfrac{1}{9}\beta_p I$. Le terme en J^2 est un peu embêtant, mais on se souvient que $J^2 = 4J$ (enfin, on le redémontre), et on obtient alors $M^{2p+2} = \left(\dfrac{8}{9}\alpha_p + \dfrac{2\beta_p}{9} + \dfrac{\alpha_p}{9}\right) J + \dfrac{\beta_p}{9} I = \left(\alpha_p + \dfrac{2\beta_p}{9}\right) J + \dfrac{\beta_p}{9} I$. La propriété est donc prouvée au rang $n+1$, et on a les relations de récurrence $\alpha_{p+1} = \alpha_p + \dfrac{2\beta_p}{9}$ et $\beta_{p+1} = \dfrac{\beta_p}{9}$.

6. La suite (β_p) est tout simplement géométrique de raison $\dfrac{1}{9}$ et de premier terme $\beta_0 = 1$, donc $\beta_p = \dfrac{1}{9^p}$. La relation de récurrence pour α_p devient alors $\alpha_{p+1} = \alpha_p + \dfrac{2}{9^{p+1}}$, ou encore $\alpha_{p+1} - \alpha_p = \dfrac{2}{9^{p+1}}$. En sommant cette relation pour k compris entre 0 et $p-1$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p-1} \alpha_{k+1} - \alpha_k = \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{2}{9^{k+1}}$. La somme de gauche est télescopique, elle est égale à $\alpha_p - \alpha_0 = \alpha_p$. On en déduit que $\alpha_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{2}{9^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=p} \frac{1}{9^k} = \frac{2}{9}\frac{1-\frac{1}{9^p}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^p}\right)$. On a finalement, lorsque $n = 2p$, $M^n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{9^p}\right) J + \dfrac{1}{9^p} I = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) J + \dfrac{1}{3^n} I$. Pour en déduire les probabilités de E_n et compagnie, au vu de la relation de la question 3 et de l'allure de Z_0, il suffit de conserver la première colonne de la matrice M^n, ce qui donne $P(E_n) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$, et $P(F_n) = P(G_n) = P(H_n) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$. Ces formules ne peuvent pas être correctes lorsque n est impair, puisqu'elles donnent notamment des probabilités égales pour G_n et H_n, alors que pour $n = 1$ ou $n = 3$, celles-ci sont différentes.

7. Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, les quatre probabilités tendent vers $\dfrac{1}{4}$. On a donc à long terme une situation d'équilibre entre les quatre positions possibles.