Devoir Surveillé n°6

ECE3 Lycée Carnot

20 mars 2012

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (inspiré de CCIP ECT 2007)

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle matrice $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \dots + \frac{1}{n!}M^n$. Si tous les coefficients de S_n ont une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, on appelle exponentielle de la matrice M, et on note e^M, la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de S_n. Comme le concepteur du sujet est vraiment très gentil, il rappelle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

1. Déterminer l'exponentielle de la matrice I.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de la matrice A, en déduire son exponentielle.
3. On note désormais $B = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de B^n à l'aide de la formule du binome de Newton.
4. En déduire l'expression de la matrice S_n associée à B, puis celle de e^B. Vérifier que $e^B = e^I \times e^A$.
5. On définit une dernière matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (aucun lien avec les matrices A et B). Calculer $C^2 - 2C + I$.
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = nC - (n-1)I$.
7. Donner l'expression de la matrice S_n associée à C, puis celle de e^C.

Exercice 2 (inspiré de nombreuses épreuves, dont HEC ECT 2004)

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée, avec laquelle on effectue une suite infinie de lancers indépendants. Dans tout l'exercice, on notera P et F à la place de Pile et Face, et la notation P_i désignera l'événement « La pièce est tombée sur Pile au lancer numéro i » (respectivement F_i si la pièce est tombée sur Face). Deux joueurs désignés par les lettres A et B observent les lancers, et on considère que le joueur A gagne si la suite de lancers PPF se produit avant la suite FFP. Si c'est le contraire, c'est le joueur B qui gagne. Ainsi, si la suite de lancers débute par $PFPFFPP$, le joueur B sera déclaré vainqueur à l'issue du septième lancer.

I. Probabilité de gain du joueur A

On note dans cette partie A_n l'événement « Le joueur A gagne à l'issue du lancer numéro n ».

1. Calculez les probabilités des événements A_1, A_2, A_3 et A_4.
2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, expliquer pourquoi une seule suite de lancers permet au joueur A de gagner à l'issue du lancer numéro n, et en déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
3. Calculer, toujours lorsque $n \geqslant 3$, la probabilité que A gagne avant le lancer numéro n (inclus). Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$ (cette limite représente la probabilité de gain du joueur A avec une infinité de lancers) ?
4. En admettant que la probabilité d'un match nul est égale à 0 (cela se produit si aucun PPF ni aucun FPP n'apparait lors de la série infinie de lancers), en déduire la probabilité que le joueur B gagne.

II. Temps d'attente du premier PPF

Dans cette partie, on note désormais C_n l'événement « Le premier PPF se produit avant le tirage numéro n (inclus) », et D_n l'événement « Les lancers numéros $n-2$, $n-1$ et n ont donné pour résultats PPF » (ces événements sont définis pour tous les entiers $n \geqslant 3$).

1. Quelle est la probabilité de l'événement D_n ?
2. Exprimer simplement l'événement C_n en fonction des événements D_3, D_4, …, D_n.
3. Calculer les probabilités $P(C_3)$, $P(C_4)$ et $P(C_5)$.
4. En exprimant C_{n+1} en fonction de C_n et de D_{n+1}, montrer la relation $P(C_{n+1}) = P(C_n) + \dfrac{1}{8}(1 - P(C_{n-2}))$.
5. Écrire un programme PASCAL demandant une valeur de n à l'utilisateur et calculant la valeur de $P(C_n)$.
6. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par $u_n = P(C_n) - 1$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 3.
7. Déterminer les racines de l'équation caractéristique correspondante, en constatant que $\dfrac{1}{2}$ en est une racine évidente.
8. En déduire, sans chercher à déterminer explicitement la valeur de u_n, sa limite quand n tend vers $+\infty$, ainsi que celle de $P(C_n)$ (on admettra que, comme dans le cas d'une récurrence linéaire d'ordre 2, une suite récurrente linéaire d'ordre 3 est une somme de trois suites géométriques dont les raisons respectives sont les racines de l'équation caractéristique).
9. Expliquer pourquoi la probabilité que le premier FPP se produise avant le tirage numéro n est la même que celle de C_n (on pourra faire le même genre de construction que pour C_n, sans détailler les calculs).
10. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la première partie.
11. Calculer explicitement la valeur de u_n.

Exercice 3 (inspiré de CCIP ECE 2000)

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_1 et C_2. Initialement, les jetons se trouvent tous les deux dans la case C_1. On procède alors à une succession de lancers d'un dé équilibré à six faces. À l'issue de chaque tirage, on effectue une des opérations suivantes :

- Si le dé tombe sur 1 ou 2, on change le jeton A de case (et le B ne bouge pas).
- Si le dé tombe sur 3 ou 4, on change le jeton B de case.
- Si le dé tombe sur 5 ou 6, on ne touche à rien.

I. Étude du mouvement du jeton A.

1. Déterminer la probabilité qu'après avoir lancé n fois le dé, le jeton A n'ait jamais changé de case.
2. On note X_n l'événement « Le jeton A se trouve dans la case C_1 après n lancers de dé » et Y_n l'événement « Le jeton A se trouve dans la case C_2 après n lancers de dé », et x_n et y_n leurs probabilités respectives. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
3. Montrer que x_n est arithmético-géométrique, et calculer sa valeur. En déduire celle de y_n.
4. Calculer les limites de x_n et y_n, interpréter le résultat obtenu.

II. Étude des mouvements du couple de jetons.

On désigne dans cette partie par E_n l'événement « Les jetons sont tous les deux dans la case C_1 après n lancers de dé » ; par F_n l'événement « Le jeton A est dans la case C_1 et le jeton B dans la case C_2 après n lancers de dé » ; par G_n l'événement « Le jeton B est dans la case C_1 et le jeton A dans la case C_2 après n lancers de dé » ; et par H_n l'événement « Les jetons sont tous les deux dans la case C_2 après n lancers de dé ».

1. Calculer les probabilités de chacun de ces événements pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. En notant $Z_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$, déterminer une matrice carrée d'ordre 4, que l'on notera M, telle que $Z_{n+1} = MZ_n$.
3. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$, et préciser la valeur de Z_0.
4. Calculer M^2, puis M^4.
5. En notant J la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1, montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_p et β_p tels que $M^{2p} = \alpha_p J + \beta_p I$, et déterminer des relations de récurrence permettant d'exprimer α_{p+1} et β_{p+1} en fonction de α_p et de β_p.
6. Déterminer la valeur de α_p et de β_p, et en déduire les probabilités des événements E_n, F_n, G_n et H_n lorsque n est un entier pair. Ces formules restent-elles valables lorsque n est impair ?
7. Déterminer les limites de ces probabilités (en prenant les formules pour n pair) et interpréter le résultat obtenu.