Révisions DS6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

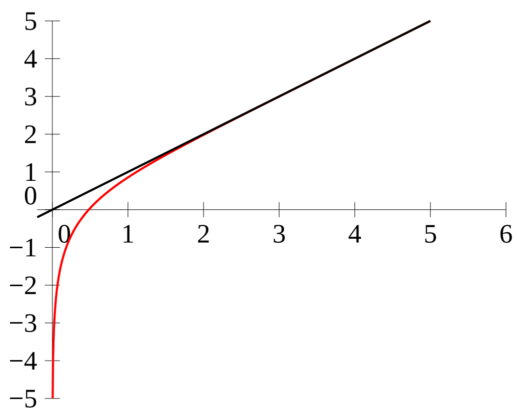
7 février 2012

1. (a) Pour que f soit définie, il faut avoir $e^x - e^{-x} > 0$, soit $e^x > e^{-x}$, ou encore $x > -x$ puisque la fonction exponentielle est croissante. Cela donne $2x > 0$, donc $\mathcal{D}_k =]0; +\infty[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to 0} e^x - e^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, $e^x - e^{-x}$ tend vers $+\infty$, donc f aussi. De plus, $f(x) = \ln(e^x(1 - e^{-2x)}) = x + \ln(1 - e^{-2x})$. On en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1 - e^{-2x})}{x}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. On calcule donc $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x})$, dont on a déjà vu que ça tendait vers 0 en $+\infty$. Conclusion : f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

   (c) Encore une fois, on reprend $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x})$. Comme $1 - e^{-2x} < 1$, cette expression est négative, donc la courbe de f est toujours en-dessous de son asymptote.

   (d) Dérivons donc f : $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Cette dérivée est strictement positive sur $]0; +\infty[$, la fonction f est donc strictement croissante. Voici la courbe de f :



2. (a) On a vu que la fonction f était strictement croissante et continue, elle est donc bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (au vu du calcul des limites). L'équation $f(x) = n$ a donc une unique solution quelle que soit la valeur de n.

   (b) Puisque $f(u_n) < f(u_{n+1})$, la fonction f étant croissante, $u_n < u_{n+1}$, et la suite est strictement croissante.

   (c) D'après le théorème de la bijection, la réciproque f^{-1} de f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Or, on a $u_n = f^{-1}(n)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) Par définition de u_n, on a $u_n - n = u_n - f(u_n)$. Or on a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} x - f(x) = 0$. La suite (u_n) ayant pour limite $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - n = 0$. De plus, $u_n - n = -\ln(1 - e^{-2u_n})$. Comme e^{-2u_n} tend vers 0, on peut appliquer l'équivalent classique de $\ln(1 + x)$ en 0 pour obtenir $u_n - n \sim e^{-2u_n}$. Or, $u_n = n + o(1)$, donc $e^{-2u_n} = e^{-2n+o(1)} = e^{-2n}e^{o(1)} \sim e^{-2n}$ puisque l'exponentielle de quelque chose qui tend vers 0 tend vers 1.

(b) On sait en fait résoudre l'équation $\ln(e^x - e^{-x}) = n$: elle équivaut à $e^x - e^{-x} = e^n$ soit, après multiplication par e^x, $e^{2x} - e^n e^x - 1 = 0$. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - e^n X - 1 = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = e^{2n} + 4$ (toujours positif) et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n} + 4}}{2}$, et X_2 qu'on oubliera car elle est négative. On revient à $x = \ln X = \ln\left(\dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n} + 4}}{2}\right)$, qui est donc la valeur exacte de u_n.