Devoir Surveillé n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2012

Exercice 1 (d'après EDHEC 2006)

1. (a) Calculons donc : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x+2y-1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y+2x-1$.

   (b) Pour déterminer les points critiques, on cherche à résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right.$.
   La combinaison $2L_1 - L_2$ donne $6x = 1$, donc $x = \frac{1}{6}$, puis en reprenant la première équation $\frac{2}{3} + 2y = 1$, donc $y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Il n'y a donc bien qu'un seule point critique, de coordonnées $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Calculons à nouveau : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2$; et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$.

   (b) On calcule $D = 16 - 4 = 12$ qui est ici constant strictement positif, avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ partout. Le point critique est donc un minimum local. La valeur de ce minimum local est $m = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

3. (a) Développons : $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$
   $= 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 + \frac{1}{36} - \frac{y}{3}\right)$
   $= 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2}y$
   $= 2x^2 + 2y^2 + xy - x - y + \frac{1}{6} = f(x,y) + \frac{1}{6}$.

   (b) On peut déduire du calcul précédent, puisqu'on a développé une somme de deux carrés, que $f(x,y) + \frac{1}{6} \geqslant 0$, autrement dit que $f(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}$ pour tout couple (x,y). Comme on a vu que $-\frac{1}{6}$ était justement la valeur prise par la fonction au point critique, celle-ci est donc un minimum absolu pour la fonction f.

4. (a) En posant $X = e^x$ et $Y = e^y$, on constate aisément que $g(x,y) = f(X,Y)$. Comme f a pour minimum global $-\frac{1}{6}$, on peut certainement en déduire que $g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}$.

   (b) La fonction g atteindra la valeur $-\frac{1}{6}$ (qui sera donc un minimum global) quand $e^x = e^y = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire lorsque $x = y = \ln 6$. La fonction g admet donc un minimum global au point $(\ln 6, \ln 6)$

Exercice 2 (d'après ESCP 1986)

1. La fonction h est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$. Un petit tableau de signes :

x		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

On en déduit que $\mathcal{D}_h =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et de plus $h(-x) = \ln \dfrac{1-x}{-x-1} + x = \ln \dfrac{x-1}{x+1} + x = -\ln \dfrac{x+1}{x-1} + x = -h(x)$, d'où l'imparité de h.

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x+1}{x-1} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$. De même (ou par imparité de h), $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$. En 1, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$, dont on déduit facilement que $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = +\infty$. Même calcul en -1^-, qui donne une limite égale à $-\infty$.

4. On peut en fait simplement constater que $h(x) = -x + \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ qui a une limite nulle en $\pm\infty$ comme on a déjà pu le constater. Ceci suffit à prouver que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. La position relative est donnée par le signe de $\ln \dfrac{x+1}{x-1}$. Il faut donc résoudre l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 1$, qui équivaut à $\dfrac{2}{x-1} \geqslant 0$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]1; +\infty[$, et en-dessous sur $]-\infty; -1[$.

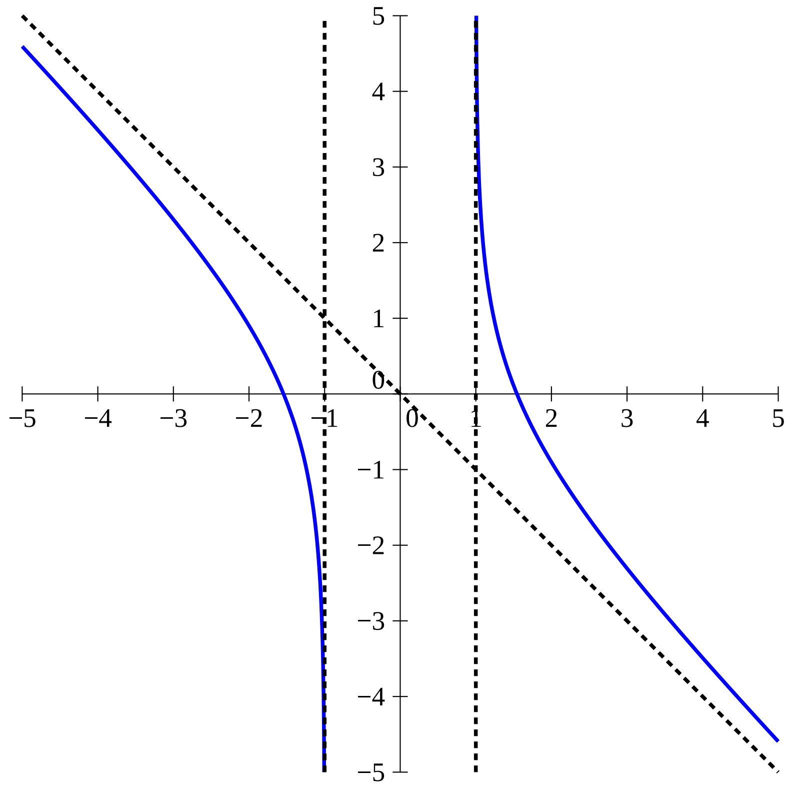
6. Calculons donc $h'(x) = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \times \dfrac{x-1}{x+1} - 1 = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)} - 1 = \dfrac{-2-(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-(1+x^2)}{(x+1)(x-1)}$. Le numérateur de cette dérivée étant toujours négatif, et son dénominateur toujours positif sur $\mathcal{D}_h$ (voir le tableau de signes de la première question), la fonction h est décroissante sur $]-\infty; -1[$ ainsi que sur $]1; +\infty[$.

7. Au vu des questions précédentes, la fonction h est continue strictement décroissante, donc bijective de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 a un unique antécédent α sur cet intervalle. Comme de plus $h\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{2} = \ln 5 - \dfrac{3}{2} > 0$; et $h(2) = \ln 3 - \dfrac{3}{2} < 0$ puisque $\ln 3 \simeq 1,1 < \dfrac{3}{2}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que h s'annule entre $\dfrac{3}{2}$ et 2, et donc que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$.

8. En utilisant l'imparité de la fonction h, on obtient :

x		$-\alpha$		-1		1		α	
$h(x)$	$+$	0	$-$	$\|$		$\|$	$+$	0	$-$

9. Allons-y pour la courbe :



10. PROGRAM valeurs ;
    USES wincrt ;
    VAR x :real ;
    FUNCTION h(t :real) :real ;
    BEGIN
    h :=ln((t+1)/(t-1))-t ;
    END ;
    BEGIN
    x :=1.5 ;
    REPEAT x :=x+0.001 UNTIL h(x)<0 ;
    WriteLn(x) ;

    Ce programme permet de calculer une valeur approchée de α à 0.001 près puisqu'on est certain que, lorsque le programme s'arrête, on a trouvé une valeur de x pour laquelle $h(x-0.001) > 0 > h(x)$, donc $x - 0.001 < \alpha < x$.

1. Au vu des calculs effectués pour h, $\mathcal{D}_f =]-1;1[$ (ce qui se trouve dans le ln a changé de signe). Sur cet intervalle, on peut écrire plus simplement $f(x) = (1-x^2)\ln(1+x) - (1-x^2)\ln(1-x)$. Lorsque x tend vers 1, le premier terme tend sans difficulté vers 0 ; quand au deuxième on peut l'écrire $(1+x)(1-x)\ln(1-x)$, avec $1-x$ qui tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = 0$ (croissance comparée). Finalement, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Même calcul en -1, on peut aussi constater que la fonction f est impaire, en tout cas $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$.

2. Calculons donc $f'(x) = -2x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + (1-x^2)\times\dfrac{2}{(1-x)^2}\times\dfrac{1-x}{1+x} = -2x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + 2$. Or, $-2xh\left(\dfrac{1}{x}\right) = -2x\ln\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} - 2x\times\dfrac{-1}{x} = -2x\ln\dfrac{1+x}{1-x} + 2 = f'(x)$.

3. En 0, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$, donc la tangente a pour équation $y = 2x$.
4. Lorsque $x \in]0;1[$, $\dfrac{1}{x} > 1$, avec $\dfrac{1}{x} > \alpha$ si $x < \dfrac{1}{\alpha}$, et symétriquement si $x \in]-1;0[$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\dfrac{1}{\alpha}$		0		$\dfrac{1}{\alpha}$		1
$h\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\simeq -\dfrac{5}{6}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\simeq \dfrac{5}{6}$	$\searrow$	0

On a au passage calculé $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha^2}\right) \ln \dfrac{1 + \frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \ln \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$. Or, comme $h(\alpha) = 0$, on a $\ln \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \alpha$, donc $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \simeq \dfrac{\frac{9}{4} - 1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

5. Et une dernière belle petite courbe pour finir :