Devoir Surveillé n°5

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2012

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.
   (a) Utiliser la question 3 pour établir que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \geqslant -1/6$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2 (d'après ESCP 1986)

Soit h la fonction définie par l'équation $h(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} - x$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Montrer que la fonction h est impaire.
3. Déterminer les limites de h aux bornes de son domaine de définition.
4. Étudier la branche infinie de la courbe de h lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire ce qui se passe du côté de $-\infty$.
5. Déterminer la position relative de la courbe de h par rapport à la droite d'équation $y = -x$.
6. Montrer que $h'(x) = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$. En déduire les variations de h.
7. Montrer l'existence d'un unique $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$. Montrer que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on donne $\ln 5 \simeq 1.6$).
8. En déduire le tableau de signes de la fonction h.
9. Tracer une allure de la courbe représentative de h.
10. Écrire un programme Pascal calculant, en partant de $x = 1.5$, les valeurs de $h(1.5)$, $h(1.501)$, $h(1.502)$ etc. jusqu'à obtenir une image $f(x) < 0$. À quoi peut servir un tel programme ?

On note désormais f la fonction définie par $f(x) = (1 - x^2) \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, et étudier les limites de f aux bornes de celui-ci.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que, si $x \neq 0$, $f'(x) = -2x \times h\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0.
4. Déduire des résultats de la première partie le tableau de variations de la fonction f. On calculera en particulier les valeurs théoriques des minimum et maximum en fonction de α, et on en donnera une valeur approchée en prenant $\alpha \simeq \dfrac{3}{2}$.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.