Révisions DS3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

3 décembre 2011

Exercice 1

1. Calculons donc : $u_3 = 14 - 1 - 4 = 9$, qui est bien un carré, celui de 3 en l'occurence ; $u_4 = 14 \times 9 - 1 - 4 = 121 = 11^2$; et $u_5 = 14 \times 121 - 9 - 4 = 1681 = 41^2$.
2. Par définition, on a $u_{n+2} = 14u_{n+1} - u_n - 4$. En décalant cette relation, on aura de même $u_{n+1} = 14u_n - u_{n-1} - 4$. Soustrayons donc ces deux égalités pour faire disparaitre les 4 : $u_{n+2} - u_{n+1} = 14u_{n+1} - u_n - 14u_n + u_{n-1}$, soit $u_{n+2} - 15u_{n+1} = -15u_n + u_{n-1}$, qui est la relation demandée (vraie seulement pour $n \geqslant 2$ à cause de la présence du terme u_{n-1}).
3. On a $v_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+2} = 14u_{n+2} - u_{n+1} - 4 - 14u_{n+1} + u_n + 4 = 14(u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = 14v_{n+1} - v_n$.

   On a bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $x^2 - 14x + 1 = 0$; son discriminant vaut $\Delta = 196 - 4 = 192 = 64 \times 3$, elle admet deux racines $r = \dfrac{14 + 8\sqrt{3}}{2} = 7 + 4\sqrt{3}$, et $s = 7 - 4\sqrt{3}$.

   On peut donc écrire $v_n = \alpha r^n + \beta s^n$, avec $v_1 = u_2 - u_1 = 0$ et $v_2 = u_3 - u_2 = 8$, donc $\alpha(7 + 4\sqrt{3}) + \beta(7 - 4\sqrt{3}) = 0$, et $\alpha(7 + 4\sqrt{3}) + \beta(7 - 4\sqrt{3}) = 8$. Pour alléger les calculs, on gardera les notation r et s pour la résolution du système : $\alpha r + \beta s = 0$, dont on déduit $\beta = -\dfrac{r}{s}\alpha$, ce qui donne dans la deuxième équation $\alpha r^2 - \dfrac{r}{s}\alpha \times s^2 = 8$, soit $\alpha r(r - s) = 8$, ou encore $\alpha = \dfrac{8}{r(r-s)}$. Ensuite, on obtient $\beta = -\dfrac{8}{s(r-s)}$. Finalement, $v_n = \dfrac{8}{r-s}(r^{n-1} - s^{n-1})$. Or, on peut calculer $\dfrac{8}{r-s} = \dfrac{8}{8\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   Ouf, la formule finale est relativement simple : $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}((7 + 4\sqrt{3})^{n-1} - (7 - 4\sqrt{3})^{n-1})$.
4. Comme on a défini la suite (v_n) par l'égalité $v_n = u_{n+1} - u_n$, on peut constater que $u_n - u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} v_k$ (en effet, la somme de droite est télescopique). Autrement dit,

   $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} v_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{k=n-1} r^{k-1} - s^{k-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{k=n-2} r^k - s^k = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} - \frac{1 - s^{n-1}}{1 - s} \right).$$

   Reste à faire intervenir ce drôle de nombre a dans tout ça. Constatons que $a^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = r$. Comme a intervient également au dénominateur dans la formule cherchée, on peut avoir l'idée de calculer également $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{7 + 4\sqrt{3}}{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 7 + 4\sqrt{3} = s$ (un petit coup de quantité conjuguée, un dénominateur qui vaut 1 et le tour est joué). Autrement dit, $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\dfrac{1 - a^{2n-2}}{1 - r} - \dfrac{1 - a^{-2n+2}}{1 - s} \right)$ (on a simplement remplacé le r et le s du numérateur respcetivement par a^2 et a^{-2}).

Or, $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{-6-4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}a$. De même, $\frac{1}{1-s} = \frac{1}{4\sqrt{3}-6} = \frac{4\sqrt{3}+6}{12} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{12} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Bref, on se retrouve avec

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{a}(1-a^{2n-2}) - a(1-a^{-2n+2})\right) = 1 + \frac{1}{6}(-a^{-1} + a^{2n-3} - a + a^{-2n+3}).$$

Dernière petite simplification : $a+\frac{1}{a} = 2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}+\frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 4$, donc $\frac{1}{6}(-a^{-1}-a) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$. On obtient enfin $u_n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(a^{2n-3} + a^{-2n+3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(a^{2n-3} + \frac{1}{a^{2n-3}}\right)$.

5. Calculons donc $b^2 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} = a$. On en déduit que $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(b^{4n-6} + \frac{1}{b^{4n-6}}\right) = \frac{1}{6}\left(b^{4n-6} + 2 + \frac{1}{b^{4n-6}}\right) = \frac{1}{6}\left(b^{2n-3} + \frac{1}{b^{2n-3}}\right)^2$. L'expression z_n recherchée vaut donc $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(b^{2n-3} + \frac{1}{b^{2n-3}}\right)$.
6. On aimerait procéder par récurrence double. Inutile d'initialiser, on a déjà constaté lors de la première question que les premiers termes de la suite sont des carrés d'entiers. Supposons donc z_n et z_{n+1} entiers.

   Constatons alors que

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}z_{n+2} &= \left(b^{2n+1} + \frac{1}{b^{2n+1}}\right) = \left(b^2 \times b^{2n-1} + b^{-2} \times \frac{1}{b^{2n-1}}\right) \\
&= \left(b^2\left(\sqrt{6}z_{n+1} - \frac{1}{b^{2n-1}}\right) + b^{-2}(\sqrt{6}z_{n+1} - b^{2n-1})\right) \\
&= \left(b^2\sqrt{6}z_{n+1} - \frac{1}{b^{2n-3}} + \frac{\sqrt{6}z_{n+1}}{b^2} - b^{2n-3}\right) \\
&= \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{6}z_{n+1} - \sqrt{6}z_n.
\end{aligned}$$

   Or, $b^2 + \frac{1}{b^2} = a + \frac{1}{a} = 4$, donc on obtient la relation $\sqrt{6}z_{n+2} = 4\sqrt{6}z_{n+1} - \sqrt{6}z_n$, soit encore $z_{n+2} = 4z_{n+1} - z_n$. On peut désormais prouver très facilement l'hérédité de notre récurrence double : z_n et z_{n+1} étant supposés entiers, z_{n+2} l'est très certainement également.

Exercice 2

1. Pour montrer l'inégalité de gauche, étudions la fonction $a : x \mapsto ln(x+1) - lnx - \frac{1}{x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $a'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur son domaine de définition, et comme $h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, on constate qu'elle a pour limite 0 en $+\infty$ (ce qui se trouve dans le ln tend vers 1, donc chacun des deux termes de la somme tend vers 0). La fonction h est donc toujours négative sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve en particulier que $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$. De même, posons $b(x) = \ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$. La fonction b est définie sur $]1; +\infty[$, de dérivée $b'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1) - x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2(x-1)} < 0$. Cette deuxième fonction

a aussi pour limite 0 en $+\infty$ (calcul similaire au précédent) et est décroissante, donc elle est toujours positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.

Notons que ces deux inégalités sont beaucoup plus faciles à obtenir en utilisant un petit peu d'intégration : si $n \leqslant x \leqslant n+1$, on a $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$, donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx$, ce qui donne $\frac{1}{n} \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant \frac{1}{n+1}$, dont on déduit facilement les inégalités demandées.

2. Si on additionne les encadrements de la question précédente pour des entiers k compris entre 2 et n (rappelons que l'encadrement ne fonctionne par si $k = 1$), on obtient que $\sum_{k=2}^{k=n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \ln(k) - \ln(k-1)$. Les deux sommes extrêmes sont télescopiques et égales respectivement à $\ln(n+1) - \ln(2)$ et à $\ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$. Il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme du milieu pour qu'elle soit égale à H_n. Ajoutons-le donc : $1 + \ln(n+1) - ln(2) \leqslant H_n \leqslant 1 + ln(n)$. Comme $1 > ln2$, on a a fortiori $H_n > \ln(n+1)$. Par application du théorème de comparaison, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. En divisant notre encadrement par $\ln(n)$, on obtient par ailleurs, en utilisant que $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, l'encadrement $1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Les deux extrêmes tendant chacun vers 1, une petite application du théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, soit $H_n \sim \ln(n)$.

3. Commençons par le plus simple : $u_n - v_n = h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, qui a bien une limite nulle. Pour la monotonie des deux suites, on peut réutiliser les résultats de la première question : $u_{n+1} - u_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = -b(n+1) < 0$ (la fonction b étant celle étudiée un peu plus faut). La suite (u_n) est donc décroissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = -a(n+1) > 0$, donc la suite (v_n) est croissante. Les deux suites sont bien adjacentes, elles convergent vers une même limite que nous nommerons opportunément γ.

4. Partons du constat précédent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$, ou si on préfère $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n - \ln(n) = \gamma$, ou encore $h_n - \ln(n) = \gamma + o(\gamma) = \gamma + o(1)$ puisque γ est une constante non nulle ($v_1 = 1 - \ln(2) > 0$ et la suite est croissante).

5. Si on veut voir un peu ce qui se passe, on écrit avec des petits points :

$$\begin{aligned}
k_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\times\frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{2n} \\
&= h_{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} = h_{2n} - h_n.
\end{aligned}$$

Pour ceux qui préfèrent les récurrences, on peut aussi en faire une. Pour $n = 1$, on a $k_1 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; et $h_2 - h_1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, donc la formule est vraie au rang

1. Supposons-la vraie au rang n, alors $k_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = k_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a donc $k_{2n+2} = h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = h_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - h_n - \frac{1}{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$, ce qui prouve l'hérédité. La formule est donc vraie pout tout entier $n \geqslant 1$.

6. On a donc, au vu de la formule obtenue à la question 4, $k_n = h_{2n} - h_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma - o(1) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) + o(1) = \ln(2) + o(1)$. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} k_n = \ln(2)$.

7. (a) On sait depuis un petit moment maintenant que $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $z_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

   (b) Procédons par identification :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} &= \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{a(2n^2+3n+1) + b(2n^2+n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{n^2(2a+2b+c) + n(3a+b+c) + a}{n(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

   Si on veut que ce numérateur soit égal à 6, on doit donc avoir $a = 6$; $2a + 2b + c = 0$ et $3a + b + c = 0$, soit $2b + c = -12$ et $b + c = -18$, donc en soustrayant les deux équations $b = 6$, puis $c = -24$. On a donc finalement $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$.

   (c) En séparant les termes pairs et impairs, on a $h_{2n+1} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} + 1$ (si on ne rajoute pas 1 à la fin, il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme de gauche). Or, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{h_n}{2}$, d'où l'égalité demandée.

   (d) Un très beau calcul pour terminer : $\sum_{k=1}^{k=n} z_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k+1} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{24}{2k+1}$. La première n'est autre que $6h_n$, la deuxième vaut $6(h_{n+1} - 1)$ car il manque le terme $\frac{1}{1}$ dans la somme pour reconnaitre h_{n+1}, et d'après la question précédente, le troisième terme vaut $24\left(h_{2n+1} - \frac{h_n}{2} - 1\right)$. On applique à tout ça les résultats de la question 4 pour obtenir $t_n = 6(\ln(n) + \gamma + o(1)) + 6(\ln(n+1) + \gamma + o(1)) - 6 - 24(\ln(2n) + \gamma + o(1)) + 12(\ln(n) + \gamma + o(1)) + 24 = 18\ln(n) + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) + 18 + o(1)$ (les γ ont le bon gout de s'en aller).

   Or, $18\ln(n) + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) = 18\ln(n) + 6\ln(n+1) - 24\ln(2) - 24\ln(n) = \ln\left(\frac{n^{18}(n+1)^6}{n^{24}}\right) - 24\ln(2)$. L'affreux ln de gauche peut être tranquillement oublié puisqu'il tend vers 0 (le numérateur est équivalent à n^{24}, donc le quotient tend vers 1), et il ne reste plus qu'à conclure que la suite (t_n) converge, et a pour limite $18 - 24\ln(2)$ (on se couchera un peu moins bêtes ce soir).

   (e) PROGRAM suite ;

```
USES wincrt;
VAR s,t :real; i,n :integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s :=0; t :=0;
FOR i :=1 TO n DO
BEGIN
s :=s+i*i;
t :=t+1/s;
END;
WriteLn(t);
END.
```