Révisions pour le DS3

ECE3 Lycée Carnot

29 novembre 2011

Deux exercices relativement courts au programme, extraits adaptés de sujets posés en concours blanc ces dernières années.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 14u_{n+1} - u_n - 4$.

1. Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5, et constater que ces nombres sont des carrés parfaits (c'est-à-dire qu'ils sont des carrés d'entiers naturels).
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+2} - 15u_{n+1} + 15u_n - u_{n-1} = 0$.
3. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 et exprimer v_n en fonction de n.
4. On pose $a = 2 + \sqrt{3}$. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(a^{2n-3} + \dfrac{1}{a^{2n-3}}\right)$.
5. On pose $b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Calculer b^2, et montrer que u_n peut s'écrire comme le carré d'une expression z_n, que l'on exprimera en fonction de b et de n.
6. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, z_n est un entier naturel.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, $u_n = h_n - ln(n)$ et $v_n = h_n - ln(n+1)$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $ln(n+1) - ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant ln(n) - ln(n-1)$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant ln(n) + 1$, puis déterminer la limite et un équivalent simple de la suite (h_n).
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on aura besoin d'étudier les fonctions $f : x \mapsto ln(x+1) - ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto ln(x+1) - ln(x+2) - \dfrac{1}{x+1}$).
4. En déduire l'existence d'un réel qu'on notera γ tel que $h_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
5. On note désormais $k_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $k_n = h_{2n} - h_n$ (par récurrence ou par un calcul direct).
6. En réutilisant les résultats des questions précédentes, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} k_n = \ln(2)$.
7. On s'intéresse désormais aux suites (t_n) et (z_n) définies par $z_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2}$ et $t_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} z_i$.
   (a) Exprimer z_n en fonction de n.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $z_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
   (c) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} = h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1$.
   (d) Déduire des questions précédentes la limite de la suite (t_n).
   (e) Écrire un programme Pascal calculant la valeur de t_n, pour un entier n choisi par l'utilisateur.