Devoir Surveillé n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

6 décembre 2011

Exercice 1

1. (a) Il y a 6 personnes à cases sur 10 places, avec un ordre important, et pas de répétitions possibles, donc $A_{10,6} = \dfrac{10!}{4!}$ possibilités.

   (b) Il faut d'abord choisir les deux personnes qui restent debout, puis asseoir les quatre personnes restantes (pas de choix pour les personnes debout), ce qui donne $\binom{4}{2} \times A_{10,4} = \binom{4}{2}\dfrac{10!}{6!}$ possibilités.

   (c) Il faut choisir les dix personnes qui s'asseoient (ou les cinq qui restent debout si on préfère), puis choisir un ordre sur les 10 personnes assises, ce qui laisse $\binom{15}{10} \times 10!$ possibilités. Si seulement 8 veulent s'asseoir, le raisonnement est exactement le même, et donne $\binom{15}{8} \times \dfrac{10!}{2!}$ positionnements.

   (d) On commence par choisir les places du couple parmi les cinq paires possibles, et on les asseoit (ça peut se faire de deux façons différentes !). Puis on asseoit les quatre personnes restantes sur les 8 sièges disponibles, soit $\binom{5}{1} \times 2! \times \dfrac{8!}{4!}$ dispositions.

   (e) Si tout le monde s'asseoit, on a deux possibilités : on asseoit le couple (toujours 5×2 choix possibles), puis on choisit 8 autres personnes à asseoir sur les 13 restantes, et on les ordonne ; ou alors on choisit 10 personnes à asseoir parmi les 13 qui restent une fois le couple écarté, et on les ordonnes (le couple restera debout). Cela donne $5 \times 2 \times \binom{13}{8} \times 8! + \binom{13}{10} \times 10!$ positions possibles.

2. (a) Peu importe qu'il y ait deux wagons, il y a 15 personnes à caser sur 20 places qui sont de toute façon distinguables, donc $\dfrac{20!}{5!}$ façons de le faire.

   (b) Il faut choisir les six personnes de la première rame (ou les neuf de la deuxième), et positionner dans chaque wagon, ce qui donne $\binom{15}{6} \times \dfrac{10!}{4!} \times \dfrac{10!}{1!}$ dispositions.

   (c) On choisit la paire de sièges du premier couple (10 choix), on les asseoit (deux possibilités), pareil pour le deuxième couple (9 choix multipliés par 2), reste ensuite à assoir 11 personnes sur 16 sièges, donc $10 \times 2 \times 9 \times 2 \times \dfrac{16!}{5!}$.

   (d) Légère différence par rapport à la question précédente : on choisit simultanément les trois paires de sièges du groupe (parmi 10 paires possibles), on asseoit n'importe comment les six personnes du groupe sur ces sièges (6! possibilités), puis on case les neuf personnes restantes sur 14 sièges, soit $\binom{10}{3} \times 6! \times \dfrac{14!}{5!}$ possibilités.

3. (a) On commence à maîtriser : 40 sièges pour quatre personnes donne $\dfrac{40!}{36!}$ possibilités.
   (b) Il faut choisir qui va dans quelle rame (4! choix), puis pour chaque wagon, on a 10 possibilités pour asseoir la personne qui s'y trouve, soit $4! \times 10^4$ possibilités.
   (c) Il reste 20 places à disposition des quatre personnes, donc $\dfrac{20!}{16!}$ choix possibles.
   (d) Pour que (par exemple), les deux premiers wagons uniquement soient vides, on reprend le résultat précédent, en lui enlevant les dispositions où tout le monde est dans le troisième wagon, soit $\dfrac{10!}{6!}$ choix, ainsi que tous ceux où tout le monde est dans le quatrième (même nombre). Il en reste donc $\dfrac{20!}{16!} - 2 \times \dfrac{10!}{6!}$. Il faut encore multiplier tout cela par le choix des deux wagons vides, c'est-à-dire par $\dbinom{4}{2}$ pour répondre à la question.
   (e) Il faut choisir le wagon plein, et asseoir les quatre personnes dedans : $4 \times \dfrac{10!}{6!}$.
   (f) On ne peut évidemment pas avoir quatre wagons vides. Comme on a calculé le nombre de cas à trois, deux et zéro wagon vides, un petit passage au complémentaire nous donne ceux avec un wagon vide : $\dfrac{40!}{36!} - 4! \times 10^4 - 6\left(\dfrac{20!}{16!} - 2 \times \dfrac{10!}{6!}\right) - 4 \times \dfrac{10!}{6!}$. Un petit peu de calcul : pour zéro wagon vide, on a $24 \times 10\ 000 = 240\ 000$ positions ; pour trois wagons vides, $4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 < 4 \times 10^4$, ce qui est beaucoup plus petit que le nombre précédent ; pour deux wagons vides, $6 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 > 6 \times 16^4 = 6 \times 65\ 536 > 360\ 000$, auquel on retranche un nombre inférieur à $12 \times 10^4 = 120\ 000$, ce qui donne un nombre plus gros que les cas à zéro wagon vide. Le nombre total de cas, lui, était de $40 \times 39 \times 38 \times 37 = 2\ 193\ 360$. Quand on retranche à ceci 240 000, un nombre plus petit que 40 000, et un nombre plus petit que $6 \times 20^4 = 960\ 000$, il reste quelque chose de plus gros que tous les nombres précédents. Autrement dit, le cas le plus probable c'est un wagon vide.
   (g) Le premier s'installe n'importe où et a donc 40 choix ; le deuxième s'installe dans un des trois wagons vides, 30 choix, le troisième dans un des deux wagons vides, 20 choix. Pour le quatrième, comme il y a trois wagons à une personne (et un vide), il peut s'asseoir n'importe où. Distinguons alors deux possibilités : s'il s'asseoit dans le wagon encore vide (10 choix), le cinquième aura devant lui quatre wagons également pleins, et choisira donc une place parmi les 36 restantes, et le dernier choisira dans les trois wagons à une personne, donc aura 27 choix possibles. Par contre si le quatrième se met dans un wagon contenant une personne (27 choix possibles), le cinquième peut aller dans le wagon vide (10 choix, puis 27 pour le dernier dans les trois wagons à une personne) ou dans un des deux wagons à une personne (18 choix, puis 19 pour le dernier qui va prendre le wagon vide ou celui à une personne, les deux autres en contenant deux). Récapitulons : on a $40 \times 30 \times 20 \times (10 \times 36 \times 27 + 27 \times (10 \times 27 + 18 \times 19))$ positionnements possibles (un arbre clarifie les choses, et serait sûrement nécessaire avec plus de 6 personnes).

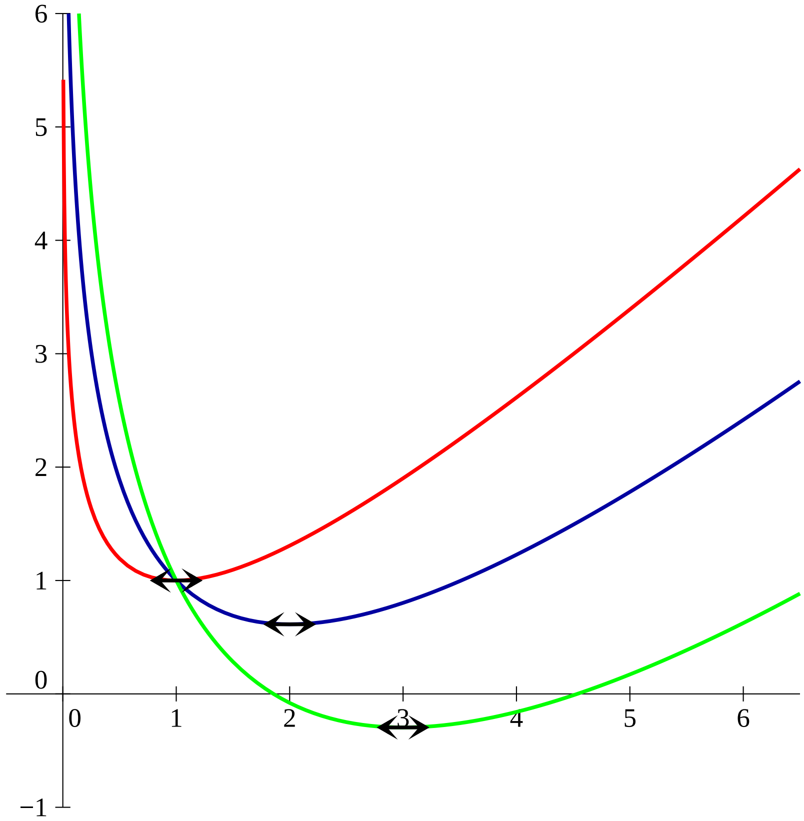
Exercice 2 (d'après EDHEC 97)

1. (a) La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = n$, par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (n est supposé strictement positif) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Enfin, $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln(x) - x + n\ln(x) = -\ln(x)$. Cette expression est positive si $x \in]0;1]$, négative sur $[1;+\infty[$. Les courbes sont donc « de plus en plus haut » sur $]0;1]$, et « de plus en plus bas » sur $[1;+\infty[$. Elles ont toutes un point commun : $f_n(1) = 1$ quelle que soit la valeur de n.

(c) Voici les allures demandées, avec minimum indiqué.



(d) Lorsque $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) > 1$ puisque $3 > e$, donc $n(1-\ln(n)) < 0$. Or, au vu du tableau de variations de la fonction f_n, celle-ci est bijective de $]0;n[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$, et de $]n;+\infty[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$. Si $n \geqslant 3$, 0 a donc exactement deux antécédents, l'un (celui qu'on notera u_n) sur l'intervalle $]0;n[$, et l'autre sur $]n;+\infty[$ (qui correspond à v_n).

2. (a) On a déja remarqué plus haut que $f_n(1) = 1 > 0$. De plus, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ avec $n \geqslant 3$. Puisque $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$, et la fonction f_n étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;n[$ auquel appartiennent ces trois valeurs, on a bien $1 < u_n < e$.

(b) Calculons donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. En remplaçant dans le calcul précédant, on a donc $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de voir que tous les termes de la suite étaient strictement supérieurs à 1, $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. La fonction f_n étant toujours décroissante sur l'intervalle considéré, $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement.

(c) Au vu de l'encadrement $1 < u_n < e$, et en utilisant le fait que $u_n = n\ln(u_n)$, on a $1 < n\ln(u_n) < e$, soit $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}$. Les deux termes extrêmes de cet encadrement ont manifestement pour limite 0, une application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) Puisque u_n tend vers 1, $u_n - 1$ tend vers 0, donc $\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1)) \sim u_n - 1$ (c'est l'équivalent classique vu en cours), ce qui correspond exactement à dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln(u_n) \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$.

3. (a) Puisque $n < v_n$, le théorème de comparaison nous donne immédiatement $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) = -n\ln(\ln(n))$. Comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 1$, et $\ln(\ln(n)) > 0$, donc $f_n(n\ln(n)) < 0$. Comme, par définition, $f_n(v_n) = 0$, et que sur $]n; +\infty[$, intervalle auquel appartiennent ces deux valeurs, f_n est croissante, on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

(c) La fonction a déjà été étudiée à la première question, puisqu'elle n'est autre que la fonction f_2. En particulier, comme son minimum $2(1 - \ln(2))$ est positif, elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, $\forall n \geqslant 1$, $f_2(n) > 0$, donc $n > 2\ln(n)$.

(d) Calculons à nouveau : $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(2\ln(n)) = n(\ln(n) - \ln(2\ln(n))$. Or, comme $n > 2\ln(n)$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$, donc $f_n(2n\ln(n)) > 0$. On en déduit comme tout à l'heure que $v_n < 2n\ln(n)$.

(e) Au vu de ce qui précède, $\ln(n) + \ln(\ln(n)) \leqslant \ln(v_n) \leqslant \ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))$, donc $1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leqslant \frac{v_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. Or, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent ont donc pour limite 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$, soit $\ln(v_n) \sim \ln(n)$. On ne peut bien évidemment pas en déduire d'équivalent simple de v_n.

Problème

I.Cas d'une suite (a_n) constante.

1. On a $b_0 = \sqrt{1} = 1$, puis $b_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et $b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Le fait que $b_0 < b_1$ est clair. Pour comparer b_1 et b_2 qui sont tous les deux positifs, le plus simples est de les élever au carré : $b_1^2 = 2$, et $b_2^2 = 1 + \sqrt{2} > 2$ puisque $\sqrt{2} > 1$. On a bien $b_2 > b_1$.

2. La fonction f est définie sur $[-1; +\infty[$, elle est la composée de deux fonctions strictement croissantes sur leur domaine de définition, donc croissante. De plus, $f(-1) = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. L'équation $f(x) = x$ se résout en passant tout au carré : $1 + x = x^2$ donne $x^2 - x - 1 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais cette deuxième valeur est négative et ne peut donc être solution de l'équation $\sqrt{1+x} = x$ (le membre de droite est négatif, et celui de gauche positif). Seule x_1 est donc solution de l'équation. Pour le signe de $\sqrt{1+x} - x$, il est évidemment positif quand $x < 0$. Si $x \geqslant 0$, $\sqrt{1+x} \geqslant x$ équivaut à $1 + x \geqslant x^2$, donc à $x^2 - x - 1 \leqslant 0$, ce qui sera le cas pour $x \leqslant x_1$ au vu du calcul précédent. On a donc $f(x) - x \geqslant 0$ si $x \in [1; x_1]$, et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[x_1; +\infty[$.

3. Faisons une petite récurrence. La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$, puisque $1 \in \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Supposons-là vérifiée au rang n, alors, la fonction f étant croissante, on aura $f(1) \leqslant f(b_n) \leqslant f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Or, $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n} = f(b_n)$; $f(1) = \sqrt{2} > 1$, et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit l'encadrement voulu pour b_{n+1}, ce qui achève la récurrence. Comme on a vu plus haut que, sur cet intervalle, on avait toujours $f(x) - x \geqslant 0$, on aura donc toujours $f(b_n) - b_n \geqslant 0$, soit $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (b_n).
4. La suite étant croissante majorée, elle converge certainement vers une limite l. Mais en passant à la limite la relation de récurrence définissant (b_n), on aura nécessairement $l = \sqrt{1+l}$, soit $l = f(l)$. Cette équation a été résolue plus haut, on a donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
5. Suivant les indications de l'énoncé, $l - \sqrt{1+x} = \frac{l^2-1-x}{l+\sqrt{1+x}}$. Or, $l^2 = 1+l$, donc $l - \sqrt{1+x} = \frac{l-x}{\sqrt{1+x}+l}$. Comme $\sqrt{1+x} \geqslant 1$ (on a supposé $x \geqslant 0$) et $l \geqslant 1$, on a donc $l - \sqrt{1+x} \leqslant \frac{l-x}{2}$.
6. La première inégalité est une simple application du résultat précédent avec $x = b_n$. La deuxième moitié se prouve par récurrence. Pour $n = 0$, on a $l - b_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant \frac{3-1}{2} = 1$, donc $l - b_0 \leqslant \frac{1}{2^0}$. Supposons désormais que $l - b_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, alors d'après la question précédente $l - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(l - b_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et, par principe de récurrence, pour tout entier n.
7.
```
PROGRAM pascal;
USES wincrt;
VAR u,e,a :real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de epsilon');
ReadLn(e);
u :=1; a :=1;
REPEAT
a :=a/2;
u :=sqrt(1+u);
UNTIL a<e;
WriteLn(u);
END.
```

II.Cas d'une suite périodique.

1. Calculons donc $b_0 = \sqrt{a_0} = 0$; $b_1 = \sqrt{a_1 + b_0} = \sqrt{1} = 1$; $b_2 = \sqrt{a_2 + b_1} = \sqrt{1} = 1$; $b_3 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $b_4 = \sqrt{0+\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$. La suite ne semble pas monotone, puisque $b_4 < b_3$ (elle est jusque-là croissante).
2. On a $c_{n+1} = b_{2n+2} = \sqrt{0 + b_{2n+1}} = \sqrt{b_{2n+1}} = \sqrt{\sqrt{1+b_{2n}}} = (1+b_{2n})^{\frac{1}{4}} = (1+c_n)^{\frac{1}{4}}$.
3. On a déjà vu plus haut que $c_0 \leqslant c_1$. Supposons donc $c_n \leqslant c_{n+1}$. On a alors certainement $1 + c_n \leqslant 1 + c_{n+1}$, donc $(1+c_n)^{\frac{1}{4}} \leqslant (1+c_{n+1})^{\frac{1}{4}}$, soit $c_{n+1} \leqslant c_{n+2}$. Ceci prouve l'hérédité, la suite est bien croissante.

4. Encore une petite récurrence. La propriété est clairement vraie pour c_0, et en la supposant vraie pour c_n, on aura $1+c_n \leqslant 3$, donc $(1+c_n)^{\frac{1}{4}} \leqslant \sqrt{\sqrt{3}} \leqslant 2$ (puisque $\sqrt{3}$ est déjà plus petit que 2), ce qui prouve l'hérédité. La suite est croissante et majorée donc convergeante.
5. On sait que $b_{2n+2} = \sqrt{b_{2n+1}}$, soit $b_{2n+1} = (b_{2n+2})^2$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n+2} = l$ (limite non connue mais finie d'après la question précédente), on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n+1} = l^2$. Si la suite (b_n) convergeait, ces deux limites devraient certainement être égales, c'est-à-dire qu'on aurait $l^2 = l$, donc $l = 1$ ou $l = 0$. Mais ces deux valeurs sont certainement exclues puisque $c_2 = 2^{\frac{1}{4}} > 1$, et la suite est croissante. Conclusion : la suite (b_n) ne peut pas converger.

III. Un autre cas particulier.

1. Tout étant positif, on peut élever cette inégalité au carré, ce qui donne $2n+1 \leqslant (n+1)^2$, soit $2n+1 \leqslant n^2+2n+1$, ce qui est certainement vrai.
2. L'inégalité de gauche est évidente : $b_n = \sqrt{n+b_{n-1}} \geqslant \sqrt{n}$ (tous les termes de la suite étant clairement positifs). Pour celle de droite, faisons une petite récurrence. C'est vrai pour $b_0 = 0$. Supposons la propriété vraie pour un entier n, alors $b_{n+1} = \sqrt{n+1+b_n} \leqslant \sqrt{n+1+n} \leqslant \sqrt{2n+1} \leqslant n+1$ d'après la question précédente, ce qui prouve l'hérédité.
3. Calculons $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1+b_n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{1+\dfrac{b_n}{n+1}}$.
4. Comme $b_n \leqslant n \leqslant n+1$, on a $\sqrt{1+\dfrac{b_n}{n+1}} \leqslant \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{2}$, d'où $b_{n+1} \leqslant \sqrt{2(n+1)}$. En décalant la relation, on obtient $b_n \leqslant \sqrt{2n}$. Mais on peut alors dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n+1} = 0$, donc en reprenant la relation de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1$. On en déduit que $b_n \sim \sqrt{n}$.

IV. Un cas plus général

1. Supposons que la suite (b_n) converge mais pas la suite (a_n). Cette dernière étant croissante, elle ne serait pas majorée, et divergerait donc vers $+\infty$. On aurait alors certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_{n+1}+b_n} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = +\infty$, ce qui contredirait fortement la convergence de (b_n). La suite (a_n) est donc nécessairement convergente.
2. C'est une petite récurrence. On a $b_0 = \sqrt{a_0}$, et $b_1 = \sqrt{a_1+b_0} > b_0$, puisque $a_1 \geqslant a_0$ (la suite est croissante) donc a fortiori $a_1+b_0 \geqslant a_0$. Supposons donc $b_n \leqslant b_{n+1}$, alors, comme par ailleurs $a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$, $a_{n+1}+b_n \leqslant a_{n+2}+b_{n+1}$, donc $\sqrt{a_{n+1}+b_n} \leqslant \sqrt{a_{n+2}+b_{n+1}}$, c'est-à-dire que $b_{n+1} \leqslant b_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité.
3. Cela revient à dire que l'équation b^2-a-b a une unique solution positive. Or, elle a pour discriminant $1+4a > 0$ (la suite (a_n) est positive, donc sa limite aussi), et admet deux racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$, et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0$. Cela répond bien à la question.
4. Une dernière récurrence. On sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a$. On a donc $b_0 = \sqrt{a_0} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{a+b} = b$. Supposons $b_n \leqslant b$, alors $b_n + a_{n+1} \leqslant b+a$, donc $b_{n+1} \leqslant \sqrt{a+b} = b$. Ceci prouve l'hérédité.
5. La suite (b_n) est croissante majorée, elle converge donc. Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite (b_n), et en notant cette limite l, on obtient $l = \sqrt{a+l}$, donc $l = b$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.